PRUEBA A

Problema 1. El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica = 650euros.
a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (2265,375; 2424,625) para la media , con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de la media poblacional por la media muestral con un nivel de confianza del 99 %.

Problema 2. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica 34,5 días.

a) Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95%?

Problema 3. En un periodo de ocho años, el nivel de los depósitos de una entidad financiera, en miles de millones de euros, sigue la función:

$$n(t) = \begin{cases} \frac{(t-2)^2}{4} + 2, si\ 0 \leq t \leq 2 \\ \sqrt{\frac{t}{2}} + 1, si\ 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

t mide el tiempo en años
a) ¿Cuándo es creciente y cuándo es decreciente n(t) ?
b) ¿Cuáles son los máximos y mínimos relativos? ¿Cuál es el nivel mínimo de los depósitos y cuándo se alcanza? ¿En qué momento, después del tercer año, el nivel de depósitos es igual a 2500 millones?
c) ¿Es continua? ¿Es derivable? Justificar las respuestas.

Problema 4. Cierta persona invierte un total de 7000 € en acciones de las empresas A y B y en un depósito a 12 meses al 1 %. Pasado un año, vende sus acciones, obteniendo una rentabilidad del 5 % en las acciones de la empresa A y del 3 % en las de B. El beneficio total de sus tres inversiones es 202 €. Determina qué cantidad destinó a cada inversión si sabemos que el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600 € al dinero del depósito.

PRUEBA B

Problema 1. Al 80% de los trabajadores en educación que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida, también al 60% de los trabajadores de justicia y al 30% de los de sanidad. En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcúlese la probabilidad de que un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

Problema 2. Se cree que, como mínimo, el 45% de los conductores suspendería un examen teórico. Se les hizo un examen teórico a 200 conductores de los cuales 70 suspendieron.
a) Con un nivel de significación del 2%, ¿se acepta que, como mínimo, el 45% de los conductores suspendería un examen teórico?
b) Usando la información del estudio muestral anterior, ¿qué número de conductores sería necesario examinar para, con una confianza del 90%, obtener un intervalo de confianza de amplitud 0.04?

Problema 3. Los costes de fabricación del nuevo ordenador súper rápido viene dados por la función $C(x)= x^2 +40x+30000$, siendo x el número de ordenadores fabricados. Si cada ordenador se vende por 490 €, determinar:
a) La función de beneficios.
b) ¿Cuántos ordenadores se deben vender para que los beneficios sean máximos?
c) ¿A cuánto ascienden los beneficios máximos?

Problema 4. Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25% sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30% sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

Problema 1. Cierta persona invierte un total de 7000 € en acciones de las empresas A y B y en un depósito a 12 meses al 1 %. Pasado un año, vende sus acciones, obteniendo una rentabilidad del 5 % en las acciones de la empresa A y del 3 % en las de B. El beneficio total de sus tres inversiones es 202 €. Determina qué cantidad destinó a cada inversión si sabemos que el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600 € al dinero del depósito.

Solución:

Llamando: x = *cantidad invertida en acciones de la empresa A*
y = *cantidad invertida en acciones de la empresa B*
z = *cantidad invertida en el depósito a 12 meses*

Escribamos las ecuaciones correspondientes al enunciado del problema:

"invierte un total de 7000€" $\rightarrow$ $x + y + z = 7000$

Pasado un año,

"rentabilidad del 5% en acciones de la empresa A" $\rightarrow$ $0'05\,x$

"rentabilidad del 3% en acciones de la empresa B" $\rightarrow$ $0'03\,y$

"rentabilidad del 1% en depósito" $\rightarrow$ $0'01\,z$

"el beneficio total de las tres inversiones es de 202€" $\rightarrow$ $0'05\,x + 0'03\,y + 0'01\,z = 202$ $\rightarrow$
(multiplicando por 100) $5\,x + 3\,y + z = 20200$

"el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600€ al dinero del depósito" $\rightarrow$ $x + y = 2600 + z$
$x + y - z = 2600$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+y+z=7000 \\ 5x+3y+z=20200 \\ x+y-z=2600 \end{cases}$. *Lo resolvemos por Gauss.*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7000 \\ 5 & 3 & 1 & 20200 \\ 1 & 1 & -1 & 2600 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 5xF_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7000 \\ 0 & -2 & -4 & -14800 \\ 0 & 0 & -2 & -4400 \end{array}\right)$$
, podemos resolver el sistema:

De F_3 $\rightarrow$ $-2\,z = -4400$ $\rightarrow$ $z = \dfrac{-4400}{-2} = 2200$

De F_2 $\rightarrow$ $-2\,y - 4\,z = -14800$, *sustituyendo el valor de* z *obtenido antes,*

$-2\,y - 4 \,.\, 2200 = -14800$
$-2\,y - 8800 = -14800$
$-2\,y = -14800 + 8800$
$-2\,y = -6000$
$y = \dfrac{-6000}{-2} = 3000$

De F_1 $\rightarrow$ $x + y + z = 7000$, *sustituyendo el valor de* z *e* y *obtenidos anteriormente,*

$x + 3000 + 2200 = 7000$
$x + 5200 = 7000$
$x = 7000 - 5200$
$x = 1800$

Solución: ***Destinó 1800€ a acciones de la empresa A, 3000€ a acciones de la empresa B y 2200€ en un depósito a 12 meses.***

Problema 17.2.5 *(2 puntos)* El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (2265,375; 2424,625) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 650$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 2265,375 \\ \overline{X} + E = 2424,625 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overline{X} = 2345 \\ E = 79,625 = 1,96\frac{650}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 256 \end{array} \right.$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 2,57$:

$$E = 2,57\frac{650}{\sqrt{225}} = 111,367$$

Problema 16.5.2 *(2 puntos)* Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

Solución:

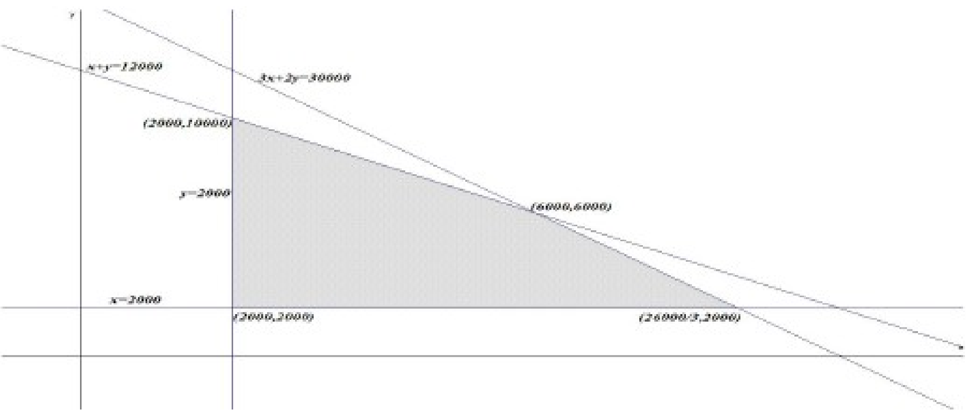
LLamamos x : litros de aceite A e y : litros de aceite B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x,y) = (0,25\cdot 3)x + (0,3\cdot 2)y = 0,75x + 0,6y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \leq 12000 \\ x \geq 2000 \\ y \geq 2000 \\ 3x + 2y \leq 30000 \end{cases}$$

La región S pedida será:

Los vértices a estudiar serán: $(2000,2000)$, $(2000,10000)$, $(26000/3,2000)$ y $(6000,6000)$:

$$\begin{cases} z(2000,2000) = 2700 \\ z(2000,10000) = 7500 \\ z(26000/3,2000) = 7700 \\ z(6000,6000) = 8100 \;\; \text{Máximo} \end{cases}$$

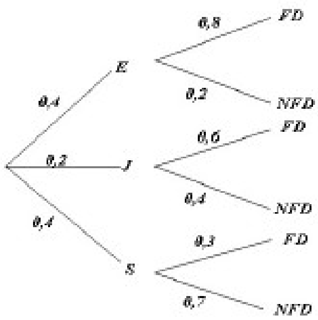


Problema 15.6.4 *(2 puntos)* Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

Solución:



a)

$$P(FD) = P(FD|E)P(E) + P(FD|J)P(J) + P(FD|S)P(S) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,56$$

b)

$$P(S|NFD) = \frac{P(NFD|S)P(S)}{P(NFD)} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{1 - 0,56} = 0,64$$

Problema 16.2.5 *(2 puntos)* Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34,5 días.

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 34{,}5)$$

a) $n = 10$, $\overline{x} = 310{,}5$, $\sigma = 34,5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{10}} = 21{,}383$$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (289{,}2, 331{,}88)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{n}} = 10 \Longrightarrow n \geq 45{,}725 \Longrightarrow n = 46$$

3. En un periodo de ocho años, el nivel de los depósitos de una entidad financiera, en miles de millones de euros, sigue la función:

$$n(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-2)^2}{4} + 2, si\ 0 \le t \le 2 \\ \sqrt{\dfrac{t}{2}} + 1, si\ 2 < t \le 8 \end{cases} \qquad (t \text{ mide el tiempo en años})$$

a) ¿Cuándo es creciente y cuándo es decreciente $n(t)$?

b) ¿Cuáles son los máximos y mínimos relativos? ¿Cuál es el nivel mínimo de los depósitos y cuándo se alcanza? ¿En qué momento, después del tercer año, el nivel de depósitos es igual a 2500 millones?

c) ¿Es $n(t)$ continua? ¿Es $n(t)$ derivable? Justificar las respuestas.

Solución

a) $n'(t) = \frac{t-2}{2} < 0$, si $0 < t < 2$. Por ello, $n(t)$ es decreciente en $(0,2)$

$n'(t) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{t}{2}}} > 0$, si $2 < t < 8$; es decir, $n(t)$ es creciente en $(2,8)$

b) Máximos relativos: $t = 0\ años, t = 8\ años,\ Valor\ máximo = 3000.000.000€$

Mínimo relativo (y además absoluto): $t = 2,\ Valor\ mínimo = 2000.000.000€$

Si $\sqrt{\frac{t}{2}} + 1 = 2{,}5$, entonces $t = 4{,}5$ años.

c) $n(t)$ es continua en el intervalo abierto $(0,2)$ por tratarse de un polinomio.

$n(t)$ es continua en el intervalo abierto $(2,8)$ por tratarse de una función racional en la que no se anula el denominador en dicho intervalo.

$n(t)$ es continua en t=2, ya que la imagen de t =2, el limite por la derecha y el limite por la izquierda al acercarnos a t =2, todos coinciden.

Por otro lado, $n(t)$ es derivable en el intervalo abierto $(0,8)$ salvo en $t = 2$ ya que, para este valor, la derivada por la izquierda es igual a cero y por la derecha es igual a $\frac{1}{4}$.

2.- Se cree que, como mínimo, el 45% de los conductores suspendería un examen teórico. Se les hizo un examen teórico a 200 conductores de los cuales 70 suspendieron.

a) Con un nivel de significación del 2%, ¿se acepta que, como mínimo, el 45% de los conductores suspendería un examen teórico?

b) Usando la información del estudio muestral anterior, ¿qué número de conductores sería necesario examinar para, con una confianza del 90%, obtener un intervalo de confianza de amplitud 0.04?

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \geq 0.45 \\ H_1 : p < 0.45 \end{array}\right\} \quad n = 200;\ \hat{p} = \frac{70}{200} = 0.35;\quad \alpha = 0.02;\ z_\alpha = z_{0.02} = 2.05$$

Región de rechazo: $\left\{ \hat{p} < p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\} = \left\{ \hat{p} < 0.45 - 2.05\sqrt{\frac{0.45 \times 0.55}{200}} \right\} = \{\hat{p} < 0.377\}$

Como $\hat{p} = 0.35$ se rechaza H_0, con un nivel de significación del 2%.

b)

$$\alpha = 0{,}1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1.64$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} < E \ \Rightarrow\ n > \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \hat{p}\cdot(1-\hat{p}) \ \Rightarrow\ n > \left(\frac{1.64}{0.02}\right)^2 0.35 \times 0.65 = 1529.71 \Rightarrow n \geq 1530$$

3. Los costes de fabricación del nuevo ordenador súper rápido viene dados por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$, siendo x el número de ordenadores fabricados. Si cada ordenador se vende por 490 €, determinar:

a) La función de beneficios.

b) ¿Cuántos ordenadores se deben vender para que los beneficios sean máximos?

c) ¿A cuánto ascienden los beneficios máximos?

Solución:

a) $B(x) = I(x) - C(x) = 490x - (x^2 + 40x + 30000) = -x^2 + 450x - 30000$

b) $B'(x) = -2x + 450 = 0$, $x = 225$ número de ordenadores para maximizar los beneficios

c) $B(225) = 20625$ €