PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD L.O.E.

CURSO 2012 - 2013 CONVOCATORIA:

MATERIA: MATEMATICAS APLICADAS A LAS CC. SS.

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B).

- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5 puntos.

PRUEBA A

1. Ante la noticia de que los españoles toman de media 9,7 gramos de sal al día (casi el doble de la cantidad recomendada por la OMS, que es de 5 gramos por persona y día), en una determinada ciudad de 52000 habitantes se hizo una campaña que consistió en rebajar la cantidad de sal en la fabricación del pan. En dicha ciudad, se toma una muestra de 144 personas para las que la media de consumo diario de sal es de 8,7 gramos con una desviación típica de 2,1 gramos.

a) Con una significación del 5%, ¿se puede rechazar que el consumo no ha bajado?

b) Con una confianza del 99%, ¿cuál es, en gramos, el máximo estimado del consumo diario medio de sal por persona? ¿Cuál es, en kilogramos, el máximo estimado del consumo diario medio de sal en toda la ciudad?

Solución

a)

$$H_0: \mu \geq 9{,}7 = \mu_0$$
$$H_1: \mu < 9{,}7$$

Región crítica:

$$z_\alpha = 1{,}645$$

$$\bar{x} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}7 - 1{,}645 \frac{2{,}1}{12} = 9{,}412125$$

Como $\bar{x} = 8{,}7 < 9{,}412125$, se rechaza H_0.

b) Intervalo de confianza: $\alpha = 0{,}01, z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$, $\bar{x} = 8{,}7, n = 49$

$$\left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[8{,}7 - 2{,}575 \frac{2{,}1}{12},\ 8{,}7 + 2{,}575 \frac{2{,}1}{12}\ \right] = [8{,}2493, 9{,}150625\ ]$$

El consumo diario medio estimado de sal por persona es como máximo 9,150625 gramos

El consumo diario medio estimado de sal en toda la ciudad es como máximo $\frac{9{,}150625 \times 52000}{1000} = 475{,}8325$ Kgr.

2. En un periódico se lee la siguiente afirmación: *"Con una confianza del 95%, la proporción de fumadores entre los jóvenes de 2º de Bachillerato está entre el 32% y el 38%"*

a) ¿Cuál es la proporción muestral y cuál es el error máximo?

b) ¿De qué tamaño es la muestra tomada para esta estimación?

c) Con una significación del 5%, ¿se puede rechazar que la proporción de fumadores es, como mínimo, del 36,5%?

Solución

a) Intervalo de confianza: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = [0{,}32, 0{,}38]$$

$$\hat{p} = 0{,}35, \;\; E = 0{,}03$$

b) Como, $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = E$, siendo $\hat{p} = 0{,}35$, obtenemos que

$$1.96\sqrt{\frac{0.35 \times 0.65}{n}} = 0.03 \rightarrow n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}03}\right)^2 \times 0{,}35 \times 0{,}65 = 971{,}0711 \approx 971$$

c) Contraste:

$$H_0 : p \geq 0{,}365 = p_0$$

$$H_1 : p < 0{,}365$$

Región crítica:

$$z_{\alpha} = 1{,}645$$

$$\hat{p} < p_0 - z_{\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0{,}339585$$

Como $\hat{p} = 0{,}35 \geq 0{,}339585$, no se rechaza H_0.

3. En los juzgados centrales de una determinada región ha comenzado una campaña para ahorrar papel concretada en la función:

$$A(x) = \begin{cases} e^{0\acute{}02x} \quad , & si \;\; 1 \leq x \leq 100 \\ -\frac{1}{50}x + 8, & si \; 100 < x \leq 390 \end{cases}$$

Donde x es el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña y A es el número de miles de hojas ahorradas

a) Estudiar si la función es creciente o decreciente.
b) ¿Qué sucede cuando han transcurrido 100 días desde el inicio de la campaña?
c) ¿En qué momento el ahorro es de cinco mil hojas?

Solución

a) $A'(x) = \begin{cases} 0{,}02e^{0\acute{}02x} & si \;\; 1 < x < 100 \\ -\frac{1}{50} & si \; 100 < x < 390 \end{cases}$

Por tanto, crece en $(1{,}100)$ y decrece en $(100{,}390)$

b)

$\lim_{x \to 100^-} A(x) = e^2 = 7{,}389056099 \approx 7389$ hojas.

$\lim_{x \to 100^+} A(x) = 6 \approx 6000$ hojas.

Es decir, la función presenta una discontinuidad de salto cuando han transcurrido 100 días.

c) Si $e^{0´02x} = 5 \rightarrow 0´02x = ln5 \rightarrow x = \frac{\ln 5}{0{,}02} = 80{,}47189562 \approx 80{,}5$ días

Si $-\frac{1}{50}x + 8 = 5, x = 150$ días

4. Se gastan 3031,25 euros en comprar 1000 cajas de papel de tres colores diferentes: amarillo, blanco y celeste. La caja de papel amarillo cuesta 5,50 euros, la caja de papel blanco cuesta 3,75 euros y, como es reutilizado, la caja de papel celeste cuesta 2,25 euros.

Sabiendo que el número de cajas celestes es el número de cajas amarillas más el doble del número de cajas blancas. Se pide:

a) Plantear el sistema que permita hallar la cantidad de cajas de cada tipo que se han comprado.
b) Resolver dicho sistema

Solución

$$a + b + c = 1000$$

$$5{,}5a + 3{,}75b + 2{,}25c = 3031{,}25$$

$$c = a + 2b$$

Solución

$$a = 125, b = 250, c = 625$$

PRUEBA B

1. Hace 5 años el consumo medio de agua por domicilio en un municipio era de 16 m^3 mensuales. Se ha hecho una campaña de ahorro de agua, y luego se ha observado una muestra de 15 domicilios elegidos al azar y se ha obtenido un consumo medio de 14,9 m^3 con una desviación típica de 3,6 m^3.

a) Con una significación del 10%, ¿se acepta que el consumo medio sigue siendo 16 m^3 o por el contrario, hay evidencias de que ha disminuido?

b) Si la misma información se hubiese obtenido de una muestra de 36 domicilios, con una significación del 10%, ¿se acepta que el consumo medio sigue siendo 16 m^3 o por el contrario, hay evidencias de que ha disminuido?

SOLUCIÓN

a) Contraste: $\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 16 \\ H_1: \mu < 16 \end{array}\right\}$ $\quad \alpha = 0.1 \Rightarrow z_\alpha = z_{0.1} = 1.28$

Región crítica: $\left\{ \bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \bar{X} < 16 - 1.28 \dfrac{3.6}{\sqrt{15}} \right\} = \left\{ \bar{X} < 14.81 \right\}$

Como $\bar{X} = 14.9 > 14.81$, se acepta $H_0: \mu = 16$, con una significación del 10%.

b) Contraste: $\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 16 \\ H_1: \mu < 16 \end{array}\right\}$ $\quad \alpha = 0.1 \Rightarrow z_\alpha = z_{0.1} = 1.28$

Región crítica: $\left\{ \bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \bar{X} < 16 - 1.28 \dfrac{3.6}{\sqrt{36}} \right\} = \left\{ \bar{X} < 15.232 \right\}$

Como $\bar{X} = 14.9 < 15.232$, se rechaza $H_0: \mu = 16$, con una significación del 10%.

2. El tiempo de un usuario en ventanilla sigue una normal de media 8 minutos con una desviación típica de 2,5 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario tarde entre 5 y 10 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de 4 usuarios supere los 11 minutos?

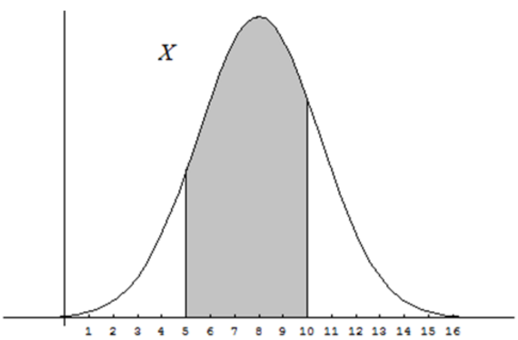
c) Si en la cola hay 24 usuarios, ¿cuántos de ellos se espera que tarden más de 8 minutos?

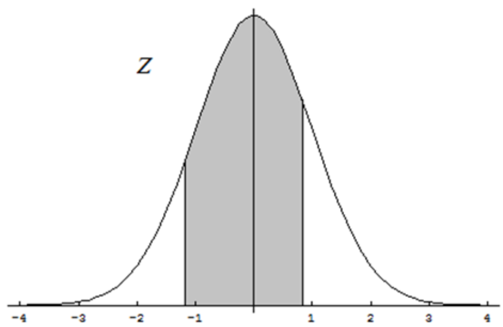
SOLUCIÓN

a) X = "Tiempo en ventanilla de un cliente"; $X \approx N(8, 2.5)$

$$P(5 < X < 10) = P\left(\frac{5-8}{2.5} < \frac{X-8}{2.5} < \frac{10-8}{2.5} \right) = P(-1.2 < Z < 0.8) = 1 - P(Z < -1.2) - P(Z > 0.8) =$$

$$= 1 - P(Z < -1.2) - P(Z > 0.8) = 1 - 0.1151 - 0.2119 = 0.673$$





b) $\overline{X}_4$ =”Tiempo medio en ventanilla de 4 clientes”; $\overline{X}_4 \approx N\left(8, \frac{2.5}{\sqrt{4}}\right) = N(8, 1.25)$

$$P(\overline{X}_4 > 11) = P\left(\frac{\overline{X}_4 - 8}{1.25} > \frac{11-8}{1.25}\right) = P(Z > 2.4) = 0.0082$$

c) Cada cliente puede tardar más de 8 minutos o menos de 8 minutos.
Éxito = Tardar más de 8 minutos.
p = P(Éxito) = P(Tardar más de 8 minutos) = $P(X>8) = 0.5$
W = “nº de clientes que tardan más de 8 minutos en 24 clientes”
$W \approx B(24, 0.5)$
$E[W] = n \cdot p = 24 \cdot 0.5 = 12$
Se espera que 12 de los 24 clientes tarden más de 8 minutos.

3. Dos fuentes de energía producen electricidad a la vez durante 10 horas, según las funciones:

$$f(x) = -x^2 + 10x + 600 \quad y \qquad g(x) = \frac{x}{2} + 615; \quad 0 \le x \le 10$$

a) ¿En qué momentos están produciendo la misma cantidad de energía las dos fuentes?
b) ¿En qué intervalo es decreciente la producción de la primera fuente?
c) ¿En qué momento es máxima la producción conjunta de las dos fuentes?

<u>SOLUCIÓN</u>

a) $f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 10x + 600 = \frac{x}{2} + 615 \Rightarrow -x^2 + 9.5x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7.5 \end{cases}$

b) Al tratarse de una parábola hacia abajo, en su vértice tiene un máximo y por tanto será decreciente a la derecha del vértice, o bien calculamos su derivada y estudiamos cuando es negativa.
$f'(x) = -2x + 10$
$f'(x) < 0 \Rightarrow -2x + 10 < 0 \Rightarrow x > 5 \Rightarrow 5 < x < 10$

c)

$$T(x) = f(x) + g(x) = -x^2 + 10{,}5x + 1215$$
$$T'(x) = -2x + 10{,}5 = 0, x = 5{,}25 \; horas$$

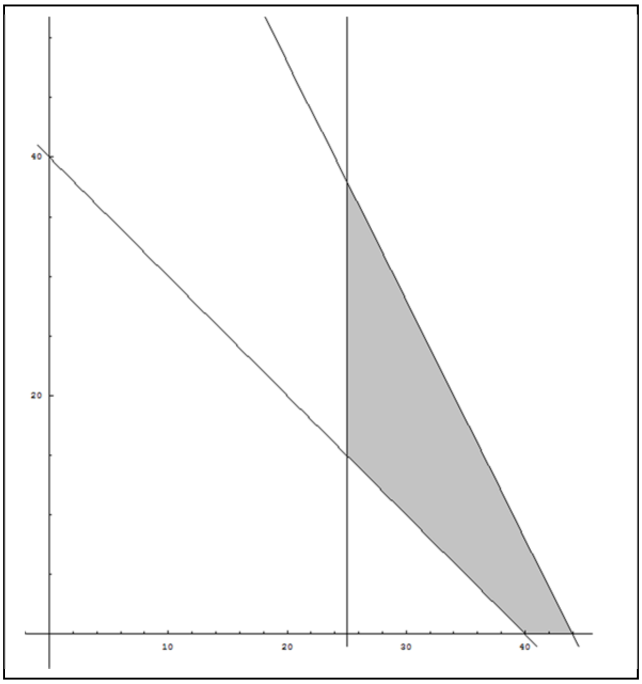
$T''(5{,}25) = -2 < 0$, en $x = 5{,}25$ horas la producción conjunta es máxima.

4. Un artesano fabrica dos tipos de puertas de jardín utilizando varillas de hierro macizo y varillas de hierro hueco. Para una puerta del primer tipo, con un beneficio por unidad de 40 €, necesita 10 metros de varilla de hierro macizo y 20 metros de varilla de hierro hueco. Para una puerta del segundo tipo, con un beneficio por unidad de 60 €, necesita 5 metros de varilla de hierro macizo y 20 metros de varilla de hierro hueco. Dispone de 440 metros de varilla de hierro macizo y, como mínimo, debe gastar 800 metros de varilla de hierro hueco. Además, tiene que fabricar un mínimo de 25 unidades del primer tipo.

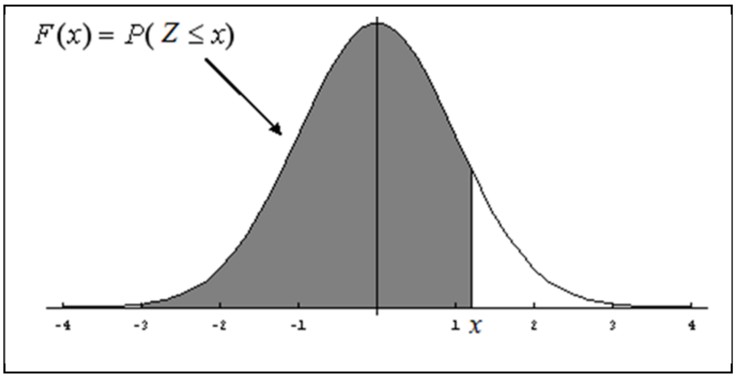
a) Plantear un problema para determinar las cantidades que debe fabricar de cada tipo para maximizar los beneficios.
b) Dibujar la región factible y encontrar la solución óptima para el problema.
c) ¿Cuántos metros le han sobrado de varillas de hierro macizo?

$$\begin{aligned} &\max 40x + 60y \\ &s.a\colon 10x + 5y \leq 440 \\ &20x + 20y \geq 800 \\ &x \geq 25 \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

x	y	$f(x,y)$
25	**38**	**3280**
25	15	1900
44	0	1760
40	0	1600



c) En el óptimo se gastan 25·10+38·5=440 de varilla de hierro macizo, se emplean todas las varillas de hierro macizo.



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000