PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

FASE GENERAL: MATERIAS DE MODALIDAD

CURSO 2009 - 2010 CONVOCATORIA:

MATERIA: MATEMATICAS APLICADAS A LAS CC. SS.

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.

- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5 puntos.

PRUEBA A

1.- A un servicio de urgencias de un hospital llegan pacientes de tres procedencias distintas: remitidos por centros de salud (47%), por iniciativa propia (32%) y afectados por accidentes y trasladados directamente por ambulancias (21%). Los pacientes que presentan dolencias graves son el 10%, el 4% y el 25%, respectivamente. Si se elige aleatoriamente un paciente que llega a dicho servicio:

a) Hallar la probabilidad de que no tenga una dolencia grave.
b) Si se le detecta una dolencia grave, determinar la probabilidad de que haya acudido por iniciativa propia.

Solución

Sean $A =$ El paciente es remitido por un centro de salud

$B =$ El paciente acude por iniciativa propia

$C =$ El paciente es un afectado por accidente y trasladado directamente en ambulancia

$DG =$ El paciente tiene una dolencia grave

Evidentemente $p(A) = 0.47$,

$p(B) = 0.32$

$p(C) = 0.21$

$p(DG/A) = 0.1$, $p(DG/B) = 0.04$ y $p(DG/C) = 0.25$.

a)

$$p(DG) = p(DG/A)\,p(A) + p(DG/B)\,p(B) + p(DG/C)\,p(C) = 0.47\times 0.1 + 0.32\times 0.04 + 0.21\times 0.25 = 0.1123$$

$$p(DG^c) = 0.8877$$

b) $$p(B/DG) = \frac{p(DG/B)\,p(B)}{p(DG)} = \frac{0.0128}{0.1123} = 0.11398$$

2.- Para una muestra de 625 jóvenes menores de 19 años se obtuvo una media muestral de 178 miligramos de colesterol por decilitro de sangre, con una desviación típica de 45 miligramos de colesterol por decilitro de sangre.

a) Si se afirma que el índice de colesterol medio en sangre, para jóvenes menores de 19 años, es como máximo 170 miligramos por decilitro, ¿los datos anteriores permitirían aceptar dicha afirmación con una significación del 1%?
b) Determinar un intervalo de confianza del 95% para la media del colesterol por decilitro de sangre en la población de jóvenes menores de 19 años.

Solución

a) El contraste que hay que plantear es:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \le 170 = \mu_0 \\ H_1 : \mu > 170 \end{array}\right\} \qquad \overline{X} = 178; \quad \alpha = 0,01; \quad ; \quad z_{0,01} = 2.33$$

Región de Rechazo: $\left\{ \overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \overline{x} > 1.70 + 2.33 \dfrac{45}{\sqrt{625}} \right\} = \left\{ \overline{x} > 174.194 \right\}$

Como $\overline{X} = 178$, se rechaza H_0.

b) $\alpha = 0.05$; $\dfrac{\alpha}{2} = 0.025$; $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 1.96$

Intervalo de confianza:

$$\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[178 - 1.96 \frac{45}{\sqrt{625}}, 178 + 1.96 \frac{45}{\sqrt{625}} \right] = [174.472,\ 181.528]$$

3.- Supongamos que $N(x)$ mide, sobre una escala en milímetros, el nivel del agua en un pantano en función del número de días, *x*, transcurridos en el año:

$$N(x) = \begin{cases} x^3 - 36x^2 + 324x, \text{ si } 0 \le x \le 21 \\ 189, \text{ si } x > 21 \end{cases}$$

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) ¿En algún momento el nivel es mayor que 863?
c) ¿Presenta la función alguna discontinuidad?

Solución

a) Si $f(x) = x^3 - 36x^2 + 324x$, $f'(x) = 3x^2 - 72x + 324 = 3(x-6)(x-18) = 0$, $x = 6, x = 18$

$f''(x) = 6x - 72$, $f''(6) < 0$ (máximo), $f''(18) > 0$ (mínimo)

Intervalos de crecimiento $(0,6)$ y $(18,21)$.

Intervalo de decrecimiento $(6,18)$. Para $x \ge 21$ la función es constante.

b) $f(x) = x(x-18)^2 \ge 0$. $f(6) = 864$. Por tanto, si $x = 6$ el nivel es mayor que 863.

c) Como $f(21) = 189$, $N(x)$ es continua.

4.- La función $g(t) = \dfrac{t^2+2}{t^2+1}$ controla las ganancias, en decenas de millones de euros, de una empresa en función del tiempo $t \ge 0$ (expresado en años).

a) ¿Cuándo las ganancias son máximas?
b) ¿Cuándo las ganancias decrecen?
c) ¿Cuántos millones de euros valen las ganancias cuando el tiempo crece indefinidamente?

Solución

a) $g'(t) = \dfrac{2t(t^2+1) - 2t(t^2+2)}{(t^2+1)^2} = \dfrac{-2t}{(t^2+1)^2} < 0$ si $t > 0$. Por tanto, las ganancias son máximas cuando $t = 0$.

b) Las ganancias decrecen en $(0, \infty)$.

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2+2}{t^2+1} = 1$. Por tanto, las ganancias tienden a 10 millones de euros cuando el tiempo crece indefinidamente.

5.- En una boda hay 350 invitados entre familiares de la novia, familiares del novio (no hay familiares de ambos) y amigos. Por cada once familiares hay tres amigos. Los familiares de la novia superan en 25 a los familiares del novio.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
b) ¿Cuántos familiares de la novia, familiares del novio y amigos hay en la boda?

Solución

$x =$ familiares de la novia

$y =$ familiares del novio

$z =$ amigos

Sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 350 \\ \frac{z}{x+y} &= \frac{3}{11} \\ x &= y + 25 \end{aligned}$$

$x = 150,\ y = 125,\ z = 75$

PRUEBA B

1.- Una entidad bancaria concede tres tipos de créditos: para vivienda, para industria y personales. Se sabe que el 30% de los créditos que concede son para vivienda, el 50% para industria y el 20% restante son personales. Han resultado impagados el 5% de los créditos para vivienda, el 7% de los créditos para industria y el 12% de los créditos para consumo. Se pide:

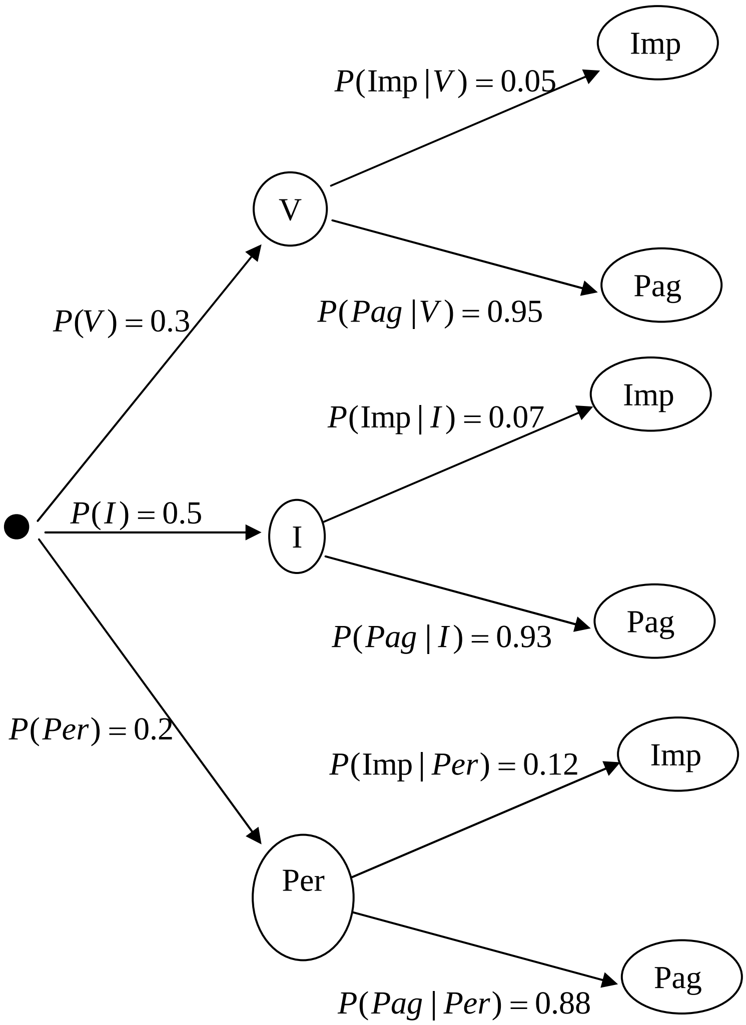
a) Representar la situación mediante un diagrama en árbol.

b) Seleccionado un crédito al azar, calcular la probabilidad de que se pague.

c) Un determinado crédito ha resultado impagado. Calcular la probabilidad de que sea un crédito de vivienda.

Solución

a)



b)

$$P(Pag) = P(Pag\,|V)\cdot P(V) + P(Pag\,|\,I)\cdot P(I) + P(Pag\,|\,Per)\cdot P(Per) =$$

$$= 0.95\cdot 0.3 + 0.93\cdot 0.5 + 0.88\cdot 0.2 = 0.926$$

c)

$$P(V\,|\,IMP) = \frac{P\left(IMP\,|V\right)\cdot P\left(V\right)}{P(IMP)} = \frac{0.05\cdot 0.3}{0.074} = 0.2027$$

2.- En su propaganda, un fabricante asegura que las bombillas que fabrica tienen una duración media de al menos 1600 horas. A fin de contrastar este dato, se tomó una muestra aleatoria de 100 bombillas, obteniéndose una duración media de 1570 horas, con una desviación típica de 120 horas.

a) Plantear el contraste, para decidir si se acepta la información del fabricante.

b) ¿Puede aceptarse la información del fabricante con un nivel de significación del 4%?

c) Si la misma información muestral se hubiese obtenido de una muestra de 40 bombillas, ¿se aceptaría la información del fabricante con un nivel de significación del 4%?

Solución

a)

Contraste:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} H_0: \mu \geq 1600 \\ H_1: \mu < 1600 \end{array}\right\}$$

b)

$n = 100;\ \overline{X} = 1570;\ \sigma = 120;\ \ \alpha = 0.04;\ \ z_\alpha = z_{0.04} = 1.75$

Región Crítica $\ \overline{x} < \mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1600 - 1.75\dfrac{120}{\sqrt{100}} = 1579$

$Como\quad \overline{X} = 1570 < 1579\quad Se\quad rechaza\quad H_0$

c)

$n = 40;\ \overline{X} = 1570;\ \sigma = 120;\ \ \alpha = 0.04;\ \ z_\alpha = z_{0.04} = 1.75$

Región Crítica $\ \overline{x} < \mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1600 - 1.75\dfrac{120}{\sqrt{40}} = 1566.8$

$Como\quad \overline{X} = 1570 > 1566.8\quad Se\ \ acepta\quad H_0$

3.- En un Instituto de Enseñanza Secundaria hay matriculados 800 alumnos. Se seleccionó una muestra aleatoria del 15% de los alumnos, y se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 24 alumnos.

a) Con una confianza del 99%., estima en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

b) Con una confianza del 99%, ¿cuál es el error máximo cometido con la estimación que nos da la muestra?

c) ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 6% con una confianza del 99%?

Solución:

a)

El intervalo de confianza para la proporción poblacional, *p*, de portadores es:

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$n = \dfrac{15}{100}800 = 120;\ \ \hat{p} = \dfrac{24}{120} = 0.2,\ \ \alpha = 0.01;\ \dfrac{\alpha}{2} = 0.005;\ z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.57,$

el intervalo es igual a:

$$\left[0.2 - 2.57\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{120}}, 0.2 + 2.57\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{120}}\right] = [0.2 \pm 0.0938] = [0.1061, 0.2938]$$

b) El error máximo es 0.0938, es decir del 9.38%

c)

$$\alpha = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2.57$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} < E \ \Rightarrow\ n > \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \hat{p}\cdot(1-\hat{p}) \ \Rightarrow\ n > \left(\frac{2.57}{0.06}\right)^2 0.2\times 0.8 = 293.55 \Rightarrow n \geq 294$$

4.- El número de personas, en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa, viene dado por la función:

$f(t)=\dfrac{2500t}{t^2+25}$, donde t es el tiempo transcurrido en días desde que se inició el contagio.

a) ¿En qué día se tiene el máximo número de enfermos? ¿Cuántos son éstos?
b) ¿Sería correcto afirmar que la enfermedad se irá extinguiendo con el transcurso del tiempo? Justifícalo razonadamente.
c) ¿Cuál es la tasa de cambio (nota: tasa de cambio = derivada) del número de personas afectadas correspondiente al décimo día?

Solución

a)

$$f'(t)=\frac{2500(t^2+25)-2500t(2t)}{\left(t^2+25\right)^2}=\frac{-2500t^2+62500}{\left(t^2+25\right)^2}$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{-2500t^2+62500}{\left(t^2+25\right)^2}=0\Rightarrow -2500t^2+62500=0\Rightarrow\begin{cases}t_1=5\\ t_2=-5\ (\textit{Se descarta})\end{cases}$$

b)

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2500t}{t^2+25}=0$ ya que es un cociente de polinomios y el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

c)

$$f'(t)=\frac{-2500t^2+62500}{\left(t^2+25\right)^2};\qquad f'(10)=\frac{-2500\cdot 10^2+62500}{\left(10^2+25\right)^2}=-12$$

5.- Una empresa tiene que contratar personal. Por cada joven contratado recibe una ayuda mensual de 200 euros y por cada adulto pagará 350 euros a la seguridad social. Tiene que contratar como mínimo 10 adultos. En total no puede contratar más de 100 trabajadores y el número de jóvenes tiene que ser como máximo el triple de adultos.
¿Cuántos jóvenes y cuántos adultos debe contratar para que su gasto mensual sea mínimo?

Solución

$$\begin{array}{ll} Min & 350A - 200J \\ s.a: & J + A \leq 100 \\ & J \leq 3A \\ & A \geq 30 \\ & J, A \geq 0 \end{array}$$

$$\boxed{f(25,75) = 350 \times 25 - 200 \times 75 = -6250}$$
$$f(10,30) = 350 \times 10 - 200 \times 30 = -2500$$
$$f(100,30) = 350 \times 100 - 200 \times 30 = +35000$$