PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
FASE ESPECÍFICA: MATERIAS DE MODALIDAD

CURSO 2009 - 2010   CONVOCATORIA:

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC SS

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B).
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5 puntos.

PRUEBA A

1.- Un nuevo operador telefónico quiere lanzar en la ciudad una nueva línea de ADSL. Realiza una encuesta entre 520 familias de la ciudad, de las cuales 150 contestan que se cambiarían al nuevo operador.

a) ¿En qué intervalo se encuentra la proporción de familias que cambiaría de operador, con una confianza del 97%?

b) Haciendo uso de la información muestral inicial, ¿qué tamaño muestral sería necesario para estimar la proporción de familias que se cambiarían de operador, con un error menor del 2% y una confianza del 95%?

Solución:

a) $n = 520 \quad ; \quad \hat{p} = \dfrac{150}{520} = 0.288 \quad ; \quad \alpha = 0.03 \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha/2} = Z_{0.015} = 2.17$

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \left(0.288 - 2.17\sqrt{\frac{0.288\cdot 0.712}{520}}, 0.288 + 2.17\sqrt{\frac{0.288\cdot 0.712}{520}} \right) =$$

$$= (0.288 - 0.043, 0.288 + 0.043) = (0.245, 0.331)$$

La proporción de familias que se cambiaría está entre el 24.5% y el 33.1%

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p\cdot(1-p)}{n}}, \qquad \alpha = 0.05, \qquad Z_{0.025} = 1.96$

$$1.96\sqrt{\frac{0.288\cdot 0.711}{n}} < 0.02, \qquad n > \frac{1.96^2 \cdot 0.288\cdot 0.712}{0.02^2} = 1969.35 \Rightarrow n \geq 1970$$

Por lo tanto son necesarias, al menos, 1970 familias.

2.- En una piscifactoría, dedicada a la cría de salmones, se elige una muestra de 50 ejemplares adultos para la que el peso medio muestral es de 3500 gr con una desviación típica de 750 gr.

a) Calcular el intervalo de confianza para el peso medio de los salmones adultos con un nivel de confianza del 97%.

b) Con un nivel de confianza del 98%, determinar el número mínimo de salmones que se han de elegir para estimar el peso medio con un error menor de 100gr.

Solución:

a) $$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3500 - 2.17\frac{750}{\sqrt{50}}, 3500 + 2.17\frac{750}{\sqrt{50}}\right) =$$

$$= (3500 \pm 230.16) = (3269.84,\ 3730.16)$$

b) $$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33 \quad \Rightarrow \quad 2.33\frac{750}{\sqrt{n}} < 100 \quad \Rightarrow \quad n > \left(2.33\frac{750}{100}\right)^2$$

$$n > 305.376 \quad \Rightarrow \quad n \geq 306$$

3.- La producción (en toneladas) del plátano en Canarias depende de la climatología de las islas, según la función $P(t) = (32-t)(t+1)^2$, $t \geq 10$, siendo t la temperatura en grados.

a) ¿Cuál es la temperatura óptima para la producción máxima del plátano en Canarias y qué producción se obtiene?

b) ¿A qué temperatura no hay cosecha?

c) Con temperaturas entre 15 y 25 grados, ¿a qué temperatura es mínima la producción?

Solución:

a)

$$P(t) = -t^3 + 30t^2 + 63t + 32 \Rightarrow P'(t) = -3t^2 + 60t + 63$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 60t + 63 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 21 \\ t = -1\ (Se\ descarta) \end{cases}$$

$$P''(t) = -6t + 60 \Rightarrow P''(21) = -6\cdot 21 + 60 = -66 < 0 \Rightarrow P(t) \text{ tiene un máximo en } t = 21$$

Si t = 21 $P(21)$= 5324 toneladas.

b) $P(t) = (32-t)(t+1)^2$

$$P(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1\ (se\ descarta) \\ t = 32 \end{cases}$$

A 32 grados la producción es cero.

c) Al no tener algún mínimo local en el intervalo, el mínimo se alcanza en algún extremo del intervalo.

$P(15) = (32-15)(15+1)^2 = 1792$, la producción es menor a 15 grados.

$P(25) = (32-25)(25+1)^2 = 4732$

4.- Una agencia de viajes vende un total de 450 billetes de avión para viajar a las Islas Canarias, a la Península y al extranjero. Los billetes a la Península son la mitad del resto y por cada tres billetes para las Islas se vende uno para el extranjero.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos billetes ha vendido la agencia para cada uno de los tres destinos.
b) Resolver el problema.

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} I+P+E=450 \\ P=\dfrac{I+E}{2} \\ \dfrac{E}{I}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} I+P+E=450 \\ P=\dfrac{I+E}{2} \\ \dfrac{E}{I}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} I+P+E=450 \\ I+E-2P=0 \\ 3E-I=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=150 \\ I=3E \\ E=\dfrac{450-P}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} I=225 \\ P=150 \\ E=75 \end{array}$$

<u>PRUEBA B</u>

1.- Hemos tomado una muestra aleatoria de 80 conejos en un criadero industrial. Se ha encontrado que 21 de ellos presentaban una enfermedad que, probablemente, adquirían a través del pienso con que se les alimentaba. Sabemos que la población de conejos en el criadero es de 12000 unidades.

a) Determinar, con una confianza del 92%, entre qué valores se encuentra el número de conejos enfermos.
b) Haciendo uso de la información muestral inicial, ¿qué número de conejos será necesario estudiar para estimar la proporción de conejos enfermos con un error menor del 7% y con una confianza del 92%?

Solución:

a) El intervalo de confianza para la proporción poblacional, p , de enfermos es:

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Como $\hat{p} = \frac{21}{80} = 0.2625$, $\alpha = 0.08$; $\frac{\alpha}{2} = 0.04$; $z_{\alpha/2} = z_{0.04} = 1.75$, el intervalo es igual a:

$$\left[0.2625 - 1.75\sqrt{\frac{0.2625 \times 0.7375}{80}}, 0.2625 + 1.75\sqrt{\frac{0.2625 \times 0.7375}{80}}\right] =$$

$$= [0.2625 \pm 0.086] = [0.1764, 0.3485]$$

Luego con una confianza del 92%, el número de conejos enfermos es un valor del intervalo: $[12000 \cdot 0.1764, 12000 \cdot 0.3485] = [2116.8, 4182] \cong [2116, 4182]$

b)

Solución:

$$\alpha = 0.08;\ \frac{\alpha}{2} = 0.04;\ z_{\alpha/2} = z_{0.04} = 1.75$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} < E \ \Rightarrow \ n > \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \hat{p}\cdot(1-\hat{p}) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ n > \left(\frac{1.75}{0.07}\right)^2 0.2625 \times 0.7375 = 120.996 \Rightarrow n \geq 121$$

2.- Los precios de un producto se distribuyen según una normal de desviación típica 15. Se ha tomado una muestra de los precios de dicho producto en 9 comercios elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

195, 208, 238, 212, 199, 206, 225, 201,215

a) ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación del 5%, que el precio medio es como máximo de 200€?
b) Determine el intervalo de confianza, al 90 %, para el precio medio de este producto

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \le 200 \\ H_1 : \mu > 200 \end{array}\right\} \quad n = 9;\ \bar{X} = 211;\quad \sigma = 15,\ \alpha = 0.05;\ z_{0.05} = 1.64$$

Región de rechazo:

$$\left[\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \infty\right] = \left[200 + 1.96\frac{15}{\sqrt{9}},\ \infty\right] = [209.8,\ \infty]$$

Como $\bar{X} = 211 \in [209.8,\ \infty]$, se rechaza H_0 con un nivel de significación del 5%.

b)

$$n = 9;\ \bar{X} = 211;\quad \sigma = 15,\ \alpha = 0.1;\ \frac{\alpha}{2} = 0.05;\quad z_{0.05} = 1.64$$

$$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[211 - 1.64\frac{15}{\sqrt{9}},\ 211 + 1.64\frac{15}{\sqrt{9}}\right] = [202.8,\ 219.2]$$

3.- Un granjero tiene un cerdo de 150 kg., cuya alimentación le supone un gasto de 36 u.m./día (u.m. = unidades monetarias). El cerdo engorda 3 kg/día. En este momento podría venderlo a 120 u.m./kg, pero está bajando el precio por kilo a razón de 2u.m. por día.

a) En cuanto venderá el cerdo si espera 14 días.
b) ¿Cuánto tiempo deberá esperar el granjero para vender el cerdo, con objeto de obtener el máximo beneficio?

Solución:

a)

$$I(x) = (150 + 3x)(120 - 2x) = -6x^2 + 60x + 18000$$

$$I(14) = (150 + 3\times 14)(120 - 2\times 14) = 17664$$

b)

$$I'(x) = -12x + 60$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow -12x + 60 = 0 \Rightarrow x = 5\ \ días$$

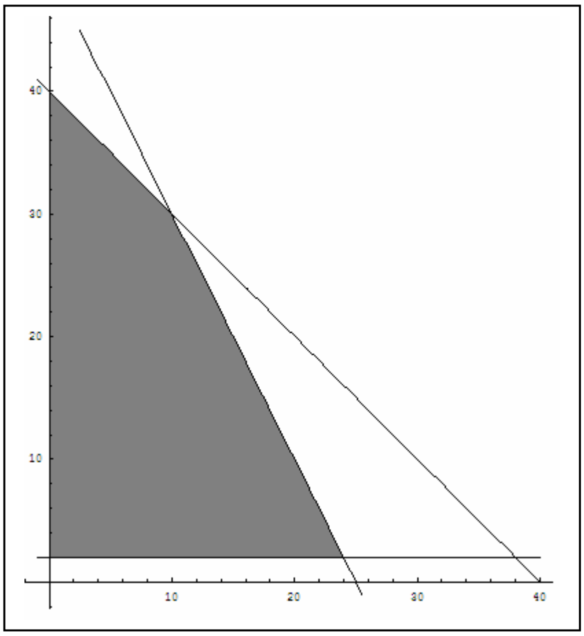
4.- Una factoría fabrica dos tipos de artículos A y B. Para su elaboración se requieren dos máquinas M1 y M2. El artículo A necesita 1 hora de la máquina M1 y 2 horas de la máquina M2. El artículo B necesita 1 hora de cada una de las máquinas. Las máquinas M1 y M2 están en funcionamiento a lo sumo 40 y 50 horas a la semana, respectivamente. Hay que fabricar al menos 2 unidades de B. Por cada unidad del artículo A se obtiene un beneficio de 200€ y por cada uno de B 90€.

a) ¿Cuántas unidades de A y B deben fabricarse semanalmente para obtener el máximo beneficio?
b) Para obtener el máximo beneficio, ¿las dos máquinas han trabajado el máximo de horas semanales?

Solución

a)

$$\begin{array}{ll} Max & 200A + 90B \\ s.a: & A + B \leq 40 \\ & 2A + B \leq 50 \\ & B \geq 2 \\ & A, B \geq 0 \end{array}$$



$$f(10,30) = 200 \times 10 + 90 \times 30 = 4700$$

$$f(24,2) = 200 \times 24 + 90 \times 2 = 4980$$

$$f(0,40) = 200 \times 0 + 90 \times 40 = 3600$$

b)

No, la máquina 1 sólo ha trabajado 24 de las 40 que esta disponible a la semana.
No, la máquina 2 sólo ha trabajado 2 de las 50 que esta disponible a la semana.