PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
FASE GENERAL: MATERIAS DE MODALIDAD

CURSO 2009 - 2010 CONVOCATORIA:

MATERIA: MATEMATICAS APLICADAS A LAS CC. SS.

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.

- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5 puntos.

PRUEBA A

1.- Se quiere estimar el tiempo medio que emplean los estudiantes en llegar desde su domicilio al instituto. Encuestados 60 alumnos se obtuvo un tiempo medio de 23 minutos con una desviación típica de 7 minutos.

a) Obtener un intervalo de confianza para el tiempo medio con una confianza del 90%.
b) ¿Qué tamaño muestral sería necesario tomar para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1.5 minutos con una confianza del 98%.

Solución

a)

$$n = 60; \quad \overline{X} = 23; \ \sigma = 7; \ \alpha = 0.1; \ \frac{\alpha}{2} = 0,05; \ z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1.64$$

$$\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[23 - 1.64\frac{7}{\sqrt{60}}, \ 23 + 1.64\frac{7}{\sqrt{60}}\right] = [21.51, \ 24.48]$$

b)

$$\alpha = 0.02; \ \frac{\alpha}{2} = 0.01; \ z_{\alpha/2} = z_{0.01} = 2.33$$

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2.33 \times 7}{1.5}\right)^2 = 118.22 \Rightarrow n \geq 119$$

2.- Se sabe que aprueban el 65% de las personas que se presentan por primera vez al examen para obtener el carnet de conducir. Si un día se van a presentar 180 personas por primera vez:

a) ¿Cuántos se espera que suspendan?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben al menos 110?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben como mínimo 100 y como máximo 115?

Solución:

X=”nº de aprobados en 180 presentados”; $X \approx Bi(180, 0.65)$

Número esperado de aprobados= $E[X] = n \cdot p = 180 \cdot 0.65 = 117$

Número esperado de suspensos=180-117=63

b)

Como $n = 180 > 30$, $np = 117 > 5$ y $n(1-p) = 63 > 5$. Una probabilidad sobre X se puede aproximar por una probabilidad sobre *X’*

$X \approx Bi(180, 0.65);\ \ X' \approx N\left(180\times 0.65, \sqrt{180\times 0.65\times 0.35}\right) = N(117, 6.4)$

$$P(X \geq 110) \cong P(X' > 109.5) = P\left(Z > \frac{109.5-117}{6.4}\right) = P(Z > -1.17) = 1-0.121 = 0.879$$

$$P(X \geq 110) \cong P(X' > 110) = P\left(Z > \frac{110-117}{6.4}\right) = P(Z > -1.09) = 1-0.1379 = 0.8621$$

c)

$$P(100 \leq X \leq 115) \cong P(100 < X' < 115) = P\left(\frac{100-117}{6.4} < Z < \frac{115-117}{6.4}\right) = P(-2.65 < Z < -0.31) =$$
$$= 0.3783 - 0.004 = 0.3743$$
$$P(100 \leq X \leq 115) \cong P(99.5 < X' < 115.5) = P\left(\frac{99.5-117}{6.4} < Z < \frac{115.5-117}{6.4}\right) = P(-2.73 < Z < -0.23) =$$
$$= 0.4090 - 0.0032 = 0.4058$$

3.- Un taller artesanal está especializado en la producción de cierto tipo de juguetes. Los costes de fabricación, $C(x)$ en euros, están relacionados con el número de juguetes fabricados, x, a través de la siguiente expresión: $C(x) = \frac{x^2}{10} + 20x + 250$.

El precio de venta de cada juguete es de 80€.

a) Plantear la función de ingresos que obtiene el taller con la venta de los juguetes producidos.
b) Plantear la función de beneficios, entendidos como diferencia entre ingresos y costes de fabricación.
c) ¿Cuántos juguetes debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

Solución

a)

$$I(x) = 80x$$

b)

$$B(x) = I(x) - C(x) = 80x - \left(\frac{x^2}{10} + 20x + 250\right) = -\frac{x^2}{10} + 60x - 250$$

c)

$$B'(x) = -\frac{1}{10}2x + 60 = -\frac{1}{5}x + 60$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}x + 60 = 0 \Rightarrow x = 300$$

$$B(300) = -\frac{300^2}{10} + 60\cdot 300 - 250 = 8750€$$

4.- Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar y pasar a papel 15.5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que el número de fotografías por minuto será función de la antigüedad de la máquina de acuerdo a la siguiente expresión ($f(x)$ representa el número de fotografías por minuto cuando la máquina tiene x años):

$$f(x)=\begin{cases}15.5-1.1x & si \quad 0\le x\le 5\\ \dfrac{5x+45}{x+2} & si \quad x>5\end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$.
b) Comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con la antigüedad de la máquina.
c) Justificar que, si tiene más de 5 años, revelará menos de 10 fotografías por minuto.
d) Por muy vieja que sea la máquina, ¿cuántas fotografías revelará por minuto?

Solución

a)

Si $x\in(0,5)$, $f(x)$ es continua pues se trata de un polinomio.

Si $x\in(5,\infty)$, $f(x)$ es continua pues se trata de un cociente de polinomios, y en ese intervalo no se anula el denominador.

En $x=5$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}15.5-1.1x=10\\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{5x+45}{x+2}=10\\ f(5)=10\end{array}\right\}\Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=5$$

b)

$$f'(x)=\begin{cases}-1.1 & si \quad 0<x<5\\ \dfrac{-35}{(x+2)^2} & si \quad x>5\end{cases}$$

Si $x\in(0,5)$, $f'(x)$ es negativa, luego f es decreciente.

Si $x\in(0,5)$, $f'(x)$ es negativa ya que el numerador es negativo y el denominador positivo, luego f es decreciente.

c)

A los 5 años revela 10 y como es decreciente, pasados los 5 años revelará menos de 10.

d)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+45}{x+2}=5 \text{ fotografías por minuto}$$

5.- Entre canarios, peninsulares y extranjeros, hay un total de 250 trabajadores en una empresa. Si el número de extranjeros se triplica habría 330 trabajadores en la empresa y si se duplica el número de canarios y se reduce a la mitad el número de peninsulares, habría 325.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
b) ¿Cuantos trabajadores hay de cada grupo?
c) Si se incrementara un 15% el número de canarios y se redujera un 10% el número de extranjeros, ¿cuántos trabajadores habría en la empresa?

Solución

a) y b)

$$\left.\begin{array}{r}C+P+E=250\\ C+P+3E=330\\ 2C+\dfrac{P}{2}+E=325\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}C+P+E=250\\ 2E=80\\ -\dfrac{3}{2}P-E=-175\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}C=120\\ E=40\\ P=90\end{array}\right\}$$

c) $120+\dfrac{15}{100}120+90+40-\dfrac{10}{100}40=264$ trabajadores.

PRUEBA B

1.- Los salarios netos que reciben los trabajadores de una región siguen una variable normal de media igual a 950 euros y desviación típica igual a 125.

a) ¿Cuál es probabilidad de que, elegido un trabajador, su salario neto sea de, al menos, 800 euros?
b) ¿Cuál es probabilidad de que, elegido un trabajador, su salario neto sea mayor que 700 euros y, como máximo, igual a 1100?
c) Si se seleccionan 675 trabajadores, ¿cuántos se espera que tengan un salario neto de, al menos, 1000 euros?

Solución:

$X =$ Salario neto que reciben los trabajadores. $X \sim N(950,125)$

a) $p(X \geq 800) = p(Z \geq -1.2) = 0.8849$

b) $p(700 < X \leq 1100) = p(-2 < Z \leq 1.2) = 0.8849 - 0.0228 = 0.8621$

c) Como $p(X \geq 1000) = p(Z \geq 0.4) = 0.3446$ y $675 \times 0.3446 = 232.605$, aproximadamente 233 trabajadores tienen un salario neto de, al menos, 1000 euros.

2.- En una muestra de 576 estudiantes universitarios, 400 van a clase en transporte público.

a) Con una confianza del 98%, determinar un intervalo de confianza para la proporción de universitarios que van a clase en transporte público.
b) A partir de los datos recogidos para la muestra, ¿se puede afirmar, con un nivel de significación del 5%, que la proporción de universitarios que van a clase en transporte público es, al menos, igual a 2/3?

Solución:

a) El intervalo de confianza es:

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Como $\hat{p} = \frac{400}{576} = 0.6944$, $\alpha = 0.02$; $\frac{\alpha}{2} = 0.01$; $z_{\alpha/2} = z_{0.01} = 2.33$, el intervalo es igual a:

$$\left[0.6944 - 2.33\sqrt{\frac{0.6944 \times 0.3056}{576}}, 0.6944 - 2.33\sqrt{\frac{0.6944 \times 0.3056}{576}}\right] = [0.64967,\ 0.73912]$$

b) Contraste

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \geq 2/3 = p_0 \\ H_1 : p < 2/3 \end{array}\right\} \quad n = 576;\ \hat{p} = 0.6944;\quad \alpha = 0.05;\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

Región de rechazo: $\left\{\hat{p} < p_0 - z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right\} = \left\{\hat{p} < \frac{2}{3} - 1.645\frac{\sqrt{2}}{35}\right\} = \{\hat{p} < 0.634355\}$

Como $\hat{p} = 0.6944$ no se rechaza H_0, con un nivel de significación del 5%.

3.- Tras un estudio realizado para 49 televidentes menores de 16 años, se concluyó, con un nivel de confianza del 99%, que la media de horas a la semana dedicadas a ver programas de animación era un valor del intervalo $[9,11]$.

a) ¿Cuál es la media muestral de horas a la semana que los televidentes menores de 16 años dedican a ver programas de animación?
b) ¿Cuál sería el correspondiente intervalo de confianza al 95%?

c) Si se reduce a la mitad la amplitud del intervalo (es decir, $\left[9.5,\ 10.5\right]$), ¿qué nivel de confianza tendremos en este intervalo?

Solución

a) El intervalo de confianza es $\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[9,11\right]$.

Por tanto, la media es el punto medio del intervalo, es decir, $\bar{X} = 10$.

b) Si $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575,\ n = 49$ y $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$, entonces $\sigma = 2.72$. Por tanto si $\alpha = 0.05$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ y

$$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[10 - 1.96\frac{2.72}{7}, 10 + 1.96\frac{2.72}{7}\right] = \left[9.2384, 10.7616\right].$$

c) Si $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{2.72}{7} = 0.5,\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.29,\ \frac{\alpha}{2} = 0.1,\ \alpha = 0.2$

4.- Si t es el tiempo, expresado en años, $c\left(t\right)$ es la función que mide los costos, en cientos de miles de euros, de una determinada empresa:

$$c\left(t\right) = \begin{cases} t^2 + 2, \text{ si } 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{t+4}{t-1}, \text{ si } t > 2 \end{cases}$$

a) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.
b) ¿Cuándo los costos son máximos? ¿Cuál es el valor máximo del costo?
c) ¿Cuál es el costo cuando transcurren los años indefinidamente?

Solución

a)

$$c'\left(t\right) = \begin{cases} 2t, \text{ si } 0 < t < 2 \\ \dfrac{-5}{\left(t-1\right)^2}, \text{ si } t > 2 \end{cases}$$

Por tanto $c\left(t\right)$ es creciente en $\left(0,2\right)$ y decreciente para $t > 2$.

b) Los costos son máximos en $t = 2$ y valen 600000 euros.

c) Como $\lim_{t\to\infty}\frac{t+4}{t-1} = 1$, cuando transcurren los años indefinidamente los costos se aproximan a 100000 euros.

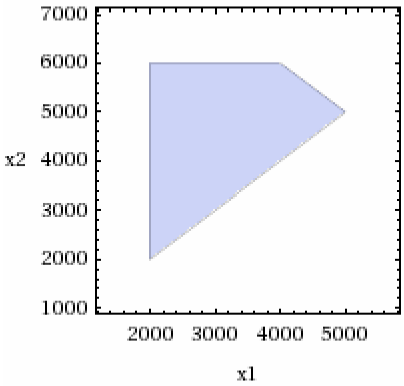
5.- Un agricultor tiene 10000 euros para invertir en su invernadero. Los tomates son más seguros, pero menos rentables (14%), las flores son más delicadas, pero tienen más rentabilidad (20%). Decide invertir, como mucho, 6000 euros en flores y, como mínimo, 2000 euros en tomates. Además, por la dedicación que requiere cada cultivo, decide que lo invertido en flores sea por lo menos lo invertido en tomates.

Calcular cuánto debe invertir en cada cultivo para que el beneficio sea máximo . Plantear el correspondiente problema y calcular dicho beneficio.

Solución

$$\max \ 0.14x + 0.2y$$
$$s.\,a: x + y \le 10000$$
$$x \ge 2000$$
$$y \le 6000$$
$$y \ge x$$
$$x, y \ge 0$$

Región factible:



Los vértices de la región factible son: A(2000,2000); B(2000,6000) ; C(4000,6000) y D(5000,5000) y la solución es 4000 euros en tomates y 6000 euros en flores y el beneficio es de 1760 euros