PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

FASE ESPECÍFICA: MATERIAS DE MODALIDAD

CURSO 2009 - 2010 CONVOCATORIA:

MATERIA: MATEMATICAS APLICADAS A LAS CC. SS.

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B).

- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5 puntos.

PRUEBA A

1.- Los responsables de Asuntos Sociales afirman que el porcentaje de personas mayores de 65 años dependientes es, como máximo, del 20 %. Si en una muestra de 225 personas mayores de 65 años hay 54 que son dependientes.

a) ¿Se puede aceptar tal afirmación con un nivel de significación del 3%?
b) ¿Y con un nivel de significación del 10%?

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p \le 0.2 \\ H_1: p > 0.2 \end{array}\right\} \quad n = 225;\ \hat{p} = \frac{54}{225} = 0.24; \quad \alpha = 0.03;\ z_\alpha = z_{0.03} = 1.88$$

Región de rechazo: $\left\{ \hat{p} > p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\} = \left\{ \hat{p} > 0.2 + 1.88\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{225}} \right\} = \{ \hat{p} > 0.25013 \}$

Como $\hat{p} = 0.24$ no se rechaza H_0, con un nivel de significación del 3%.

b) $\alpha = 0.1,\ z_{0.1} = 1.28$

Región de rechazo: $\left\{ \hat{p} > p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\} = \left\{ \hat{p} > 0.2 + 1.28\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{225}} \right\} = \{ \hat{p} > 0.23413 \}$

Como $\hat{p} = 0.24$ se rechaza H_0, con un nivel de significación del 10%.

2.- Se sabe que el 65% de los accidentes de tráfico que se producen durante la noche de los sábados se deben a la ingesta excesiva de alcohol, el 25% se deben a la imprudencia del conductor y el resto a otras causas, (fallo mecánico…etc.). En estos accidentes, el resultado es nefasto el 30% de las veces en el primer caso, el 20% en el segundo y el 5% en el tercero.
a) Calcular la probabilidad de que uno de estos accidentes no tenga resultado nefasto.
b) Si se produce un accidente sin resultado nefasto, calcular la probabilidad de que la causa de dicho accidente sea la ingesta excesiva de alcohol.

Solución

Sean $A =$ El accidente se debe a la ingesta de alcohol
$B =$ El accidente se debe a imprudencia del conductor
$C =$ El accidente se debe a otras causas
$RN =$ El accidente tiene resultado nefasto.
Evidentemente $p(A) = 0.65$,

$$p(B) = 0.25$$
$$p(C) = 0.1$$
$p(RN / A) = 0.3$, $p(RN / B) = 0.2$ y $p(RN / C) = 0.05$.

a)

$p(RN) = p(RN / A)\, p(A) + p(RN / B)\, p(B) + p(RN / C)\, p(C) = 0.65\times 0.3 + 0.25\times 0.2 + 0.1\times 0.05 = 0.24$

$p(RN^c) = 0.75$

b) $p(A / RN^c) = \dfrac{p(RN^c / A)\, p(A)}{p(RN^c)} = \dfrac{0.7\cdot 0.65}{0.75} = 0.6066$

3.- A un niño, que nació a comienzos del 2010, su padrino le ingresó en el banco 3000 euros que van a convertirse en una cantidad que varía con el tiempo, *t* (en años desde el nacimiento), según la función $C(t) = 3000(1.2)^t$

a) Demostrar razonadamente que la función es creciente.
b) ¿Cuánto dinero habrá a comienzos de 2020? ¿Y cuando el recién nacido cumpla 18 años?
c) ¿Cuántos años hay que dejar el dinero invertido para que se convierta en 6000 euros?

Solución

a) $C'(t) = 3000(1.2)^t \ln(1.2)$. Esta derivada es positiva para cualquier *t* ya que $\ln(1.2) > 0$. Por tanto, la función es creciente.

b) $C(10) = 3000(1.2)^{10} \simeq 18575.21$ euros, $C(18) = 3000(1.2)^{18} \simeq 79869.99$ euros.

c) $C(t) = 3000(1.2)^t = 6000,\ t = \dfrac{\ln 2}{\ln(1.2)} \simeq 3.8$

4.- En un barco se transportan 400 vehículos (coches, camiones y motos). Por cada dos motos hay cinco camiones. Los coches representan las 9/7 partes de los otros vehículos.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
b) ¿Cuántos vehículos de cada tipo transporta el barco?

Solución

$x =$ coches
$y =$ camiones
$z =$ motos

Sistema:

$$x + y + z = 400$$
$$\frac{y}{z} = \frac{5}{2}$$
$$x = \frac{9}{7}(y + z)$$

Resultado:

$x = 225,\ y = 125,\ z = 50$

<u>**PRUEBA B**</u>

1.- Una compañía aérea afirma que al menos el 60% de sus aviones llegan a su destino a la hora prevista. Para contrastarlo se han observado 200 vuelos de dicha compañía aérea, de los cuales 106 llegan a la hora prevista.

a) Con un nivel de significación del 5% ¿se puede aceptar la afirmación dada por la compañía?
b) Si sólo se hubiesen observado 100 vuelos, de los cuales 53 llegaron a la hora prevista, tomando un nivel de significación del 5%, ¿se puede aceptar la afirmación dada por la compañía?

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \geq 0.6 \\ H_1 : p < 0.6 \end{array}\right\} \quad n = 200 \qquad \hat{p} = \frac{106}{200} = 0.53$$

Nivel de significación $= \alpha = 0.05 \qquad z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

Región de aceptación:

$$\left(p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}, +\infty \right) = \left(0.6 - 1.645\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{200}}, +\infty \right) = \left(0.5430, +\infty\right)$$

Como $\hat{p} = 0.53 \notin \left(0.5430, +\infty\right)$, se rechaza H_0

Por lo tanto se rechaza la afirmación de la compañía aérea. Es decir, los vuelos que llegan puntuales son menos del 60%.

b)

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \geq 0.6 \\ H_1 : p < 0.6 \end{array}\right\} \quad n = 100 \qquad \hat{p} = \frac{53}{100} = 0.53$$

Nivel de significación $= \alpha = 0.05 \qquad z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

Región de aceptación:

$$\left(p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}, +\infty \right) = \left(0.6 - 1.645\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100}}, +\infty \right) = \left(0.5194, +\infty\right)$$

Como $\hat{p} = 0.53 \in \left(0.5194, +\infty\right)$ se acepta H_0

2.- La duración de un tipo de pilas tiene una distribución normal de media 9 horas y de desviación típica 1.2 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria de 16 pilas ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media sea menos de 8.5 horas?
b) Se toma una muestra aleatoria de 80 pilas ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 45 pilas duren más de 9 horas?

Solución:

a) La duración de una pila es: $X \sim N\left(\mu, \sigma\right) = N\left(9, 1.2\right)$

La duración media de 16 pilas es: $\bar{X}_{16} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(9, \frac{1.2}{\sqrt{16}}\right) = N\left(9, 0.3\right)$

$$P\left(\bar{X}_{16} < 8.5\right) = P\left(\frac{\bar{X}_{16} - 9}{0.3} < \frac{8.5 - 9}{0.3}\right) = P\left(Z < -1.66\right) = 0.0485$$

b)

Que una pila dure más de 9 horas tiene probabilidad 0.5, para cualquier pila.

W = nº de pilas de duran más de 9 horas en 80 pilas; $W \in \{0,1,2,...,80\}$

$W \sim B(80, 0.5)$

Se pide: $P\left(W \geq 45\right)$

Como $n \cdot p = 80 \cdot 0.5 = 40 > 5$ y $n \cdot (1-p) = 80 \cdot (1-0.5) = 40 > 5$. Una probabilidad sobre W se puede aproximar por una probabilidad sobre $W' \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}) = N\left(40, 4.472\right)$

Entonces:

$$P\left(W \geq 45\right) \cong P\left(W' \geq 45\right) = P\left(\frac{W' - 40}{4.472} \geq \frac{45 - 40}{4.472}\right) = P(Z \geq 1.12) = 0.1314$$

3.- Se quiere fabricar una caja con tapa, que tenga el máximo volumen y que sea el doble de larga que de ancha. Se dispone de 30 m^2 de chapa.

a) Plantear la función a maximizar
b) Plantear la condición a la que está sujeta la función a maximizar.
c) ¿Qué medidas de ancho, largo y alto debe tener la caja?

Solución:

a) Los lados de la caja son: x (ancho), $2x$ (largo), y (alto)
La función a maximizar es (ancho)$\times$(largo)$\times$(alto): $\boxed{x \cdot 2x \cdot y = 2x^2 y}$

b) La condición a la que está sujeta la función es la superficie total sea de 30 m^2
La superficie de la base de la caja es: $x(2x) = 2x^2$
La superficie de la tapa de la caja es: $x(2x) = 2x^2$
La superficie de los cuatro laterales es: $2(xy) + 2(2x \cdot y) = 6xy$
Que la superficie total sea 30 m^2 es: $\boxed{4x^2 + 6xy = 30}$

c) Se quiere entonces:

$$Max \quad 2x^2 y$$
$$s.a: 4x^2 + 6xy = 30$$

Despejando en la restricción $y = \dfrac{30 - 4x^2}{6x}$; sustituyendo en la función a maximizar es: $g(x) = 2x^2\left(\dfrac{30 - 4x^2}{6x}\right) = 10x - \dfrac{4}{3}x^3$

$$g'(x) = 10 - 4x^2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$g''(x) = -8x \Rightarrow g''\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -8\sqrt{\frac{5}{2}} < 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$ es un máximo.

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}} = \text{Ancho}$$

$$2x = 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10} = \text{Largo}$$

$$y = \frac{30 - 4x^2}{6x} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} = \text{Alto}$$

4.- Una empresa debe tener, como máximo, 140 trabajadores de dos tipos: transportistas y empleados de almacén. Por cada transportista debe haber como máximo 4 empleados de almacén y estos últimos deben ser, a lo sumo, 80. Por cada transportista, la empresa recibe una subvención de 1200€ y, por cada empleado de almacén, una subvención de 1800€.

a) ¿Se cumplen las condiciones anteriores con 30 transportistas y 70 empleados de almacén?

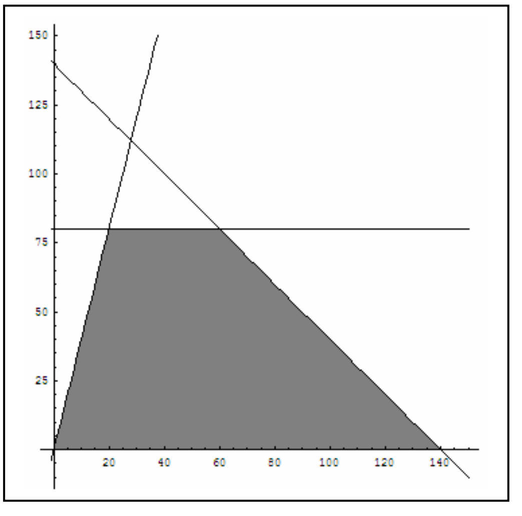
b) ¿Cuál es el número óptimo de transportistas y empleados de almacén para obtener la mayor subvención posible?

Solución

a) Si

b)

$$\boxed{\begin{array}{ll} Max & 1200x + 1800y \\ s.a: & x + y \le 140 \\ & y \le 4x \\ & y \le 80 \\ & x, y \ge 0 \end{array}}$$



$$\boxed{f(60,80) = 1200 \times 60 + 1800 \times 80 = 216000}$$

$$f(20,80) = 1200 \times 20 + 1800 \times 80 = 168000$$

$$f(140,0) = 1200 \times 140 + 1800 \times 0 = 168000$$