PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
L.O.G.S.E.

CURSO 2008 - 2009 CONVOCATORIA:

MATERIA: MATEMATICAS APLICADAS A LAS CC. SS.

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.

- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5 puntos.

PRUEBA A

1.- Se afirma que el peso medio de los alumnos de secundaria es, como máximo, de 65 kilos con una desviación típica de 2.5 kilos. Se toma una muestra de 110 alumnos de secundaria y se obtiene un peso medio de 68 kilos.

a) ¿Se puede aceptar la afirmación anterior con un nivel de significación del 10 %?
b) ¿Se concluye lo mismo si el nivel de significación es igual a 0.01?

Solución

Contraste:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \le 65 \\ H_1 : \mu > 65 \end{array}\right\}$$

a)

$\text{Re}\,\textit{gión} \quad \textit{Crítica}$

$$z_\alpha = 1.28, \qquad \overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 65.305$$

Estadístico

$$\overline{x} = 68, \qquad 68 > 65.305$$

Se rechaza H_0

b)

$\text{Re}\,\textit{gión} \quad \textit{Crítica}$

$$z_\alpha = 2.33, \qquad \overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 65.55$$

Estadístico

$$\overline{x} = 68, \qquad 68 > 66.45$$

Se rechaza H_0

2.- Una empresa de productos ecológicos desea estimar el número de familias de la ciudad que comprarían sus productos. Para ello realiza una encuesta en 625 familias entre las que 200 respondieron afirmativamente.

a) ¿En qué intervalo se encuentra la proporción de familias de la ciudad que comprarían los productos de la empresa con una confianza del 97%?
b) Usando la información que suministra la encuesta, ¿qué tamaño muestral sería necesario para estimar

la proporción de familias de la ciudad que comprarían los productos de la empresa, con un error menor que el 2% y con una confianza del 95%?

Solución

a) $n = 625;\ \hat{p} = \dfrac{200}{625} = 0.32; \quad \alpha = 0,03;\ \dfrac{\alpha}{2} = 0,015;\ z_{0,015} = 2.17$

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0.32 - 2.17\sqrt{\frac{0.32(1-0.32)}{625}}\ ,\quad 0.32 + 2.17\sqrt{\frac{0.32(1-0.32)}{625}}\right] =$$

$$= [0.2795, 0.3605]$$

La proporción de familias de la ciudad que comprarían los productos es un valor del intervalo $[0.2795, 0.3605]$ con una confianza del 97%.

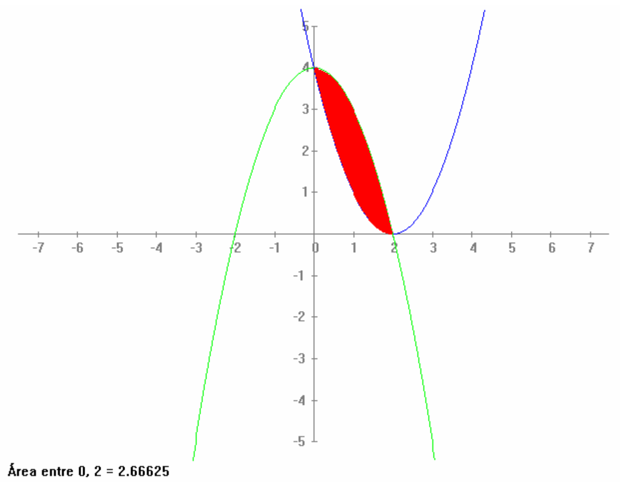
b) $E < 0.01 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < 0.01 \Rightarrow \left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{0.02}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) < n \Rightarrow\ n > \left(\dfrac{1.96}{0.02}\right)^2 0.68 \cdot 0.32 \Rightarrow n \geq 2090$

Se necesitaría encuestar al menos a 2090 viviendas para estimar la proporción de familias de la ciudad que comprarían los productos con un error menor del 2% con una confianza del 95%.

3.- En un jardín hay una superficie limitada por las curvas $y = (x-2)^2$ e $y = -x^2 + 4$, donde x está expresado en metros.

a) Representar la superficie.
b) ¿Cuánto mide?
c) Si se recubre con grava, con una altura de 10 centímetros, ¿cuántos metros cúbicos de grava son necesarios para recubrir la superficie?

Solución



$$\int_0^2 (-x^2+4) - (x-2)^2\ dx = \frac{8}{3} = 2.6666\ m^2$$

Se necesitan 0.26666 m^3 de grava.

4.- En un estudio realizado en un periodo de 10 años ($0 \leq t \leq 10$), el nivel de contaminación de CO_2 que produce la circulación de vehículos viene dado por la expresión $C(t) = -\dfrac{2}{5}t^2 + 4t + 50$. Calcular:

a) El momento en el que el nivel de contaminación es máximo.

b) ¿Cuál es el nivel máximo? ¿Cuál es el nivel mínimo y cuándo se alcanza?
c) De los diez años, ¿cuál ha sido el periodo de crecimiento?

Solución

$a)\quad C'(t) = -\frac{4}{5}t + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 5 \quad C''(t) = \frac{-4}{5} < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{máximo}$

b) $C(5) = 60$ es el nivel máximo. El nivel mínimo es $C(0) = C(10) = 50$ y se alcanza, obviamente, al comienzo y al final del periodo en estudio.

c) El periodo de crecimiento es en los 5 primeros años.
De (0,5) C'(t)>0 creciente y de (5,10) C'(t)<0 decreciente

5.- El dueño de un bar ha comprado refrescos, cervezas y vinos por un importe de 500 € (sin impuestos). El valor del vino es de 80 € menos que el de los refrescos y cerveza juntos. De impuestos ha pagado un 5% por los refrescos, un 20% por la cerveza y un 30% por el vino, lo que hace un total de 103 € de impuestos.

a) Plantear el correspondiente sistema
b) ¿Cuánto ha pagado, sin impuestos, por cada tipo de bebida?
c) ¿Cuánto ha pagado, con impuestos, por cada tipo de bebida?

Solución:
a) Si *x* = importe (sin impuestos) de los refrescos, *y* = importe (sin impuestos) de las cervezas, *z* = importe (sin impuestos) de los vinos, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ x+y-z=80 \\ 5x+20y+30z=10300 \end{array}\right\}$$

b) Por cada bebida ha pagado (sin impuestos), $x = 120 \quad y = 170 \quad z = 210$.

c) Por cada bebida ha pagado (con impuestos), 126 (refrescos), 204(cervezas) y 273(vinos).

PRUEBA B

1.- Los datos históricos indican que la proporción de personas que compran leche de la marca A es del 38%. El responsable de ventas de una cadena de grandes almacenes sospecha que dicha proporción ha aumentado y, para contrástarlo, toma una muestra de 1044 clientes de los que 429 compran leche de dicha marca.

a) Con una significación del 4%, ¿es la información muestral suficiente para rechazar que la proporción sigue siendo del 38% e inclinarnos por que dicha proporción ha aumentado?
b) ¿Cuál es la conclusión con una significación del 1%?

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p = 0.38 \\ H_1 : p > 0.38 \end{array}\right\} \quad n = 1044;\ \hat{p} = \frac{429}{1044} = 0.4109; \quad \alpha = 0.04;\ z_\alpha = z_{0,04} = 1.75$$

Región de rechazo: $\left\{ \hat{p} > p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\} = \left\{ \hat{p} > 0.38 + 1.75\sqrt{\frac{0.38 \times 0.62}{1044}} \right\} = \{\hat{p} > 0.4063\}$

Como $\hat{p} = 0.4109$ se rechaza H_0, y le damos la razón al responsable de ventas, con un nivel de significación del 4%.

b)

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p = 0.38 \\ H_1 : p > 0.38 \end{array}\right\} \quad n = 1044;\ \hat{p} = \frac{429}{1044} = 0,4109; \quad \alpha = 0,01;\ z_\alpha = z_{0,01} = 2.33$$

Región de rechazo: $\left\{ \hat{p} > p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\} = \left\{ \hat{p} > 0.38 + 2.33\sqrt{\frac{0.38 \times 0.62}{1044}} \right\} = \{\hat{p} > 0.415\}$

Como $\hat{p} = 0.4109$ se acepta H_0, y no le damos la razón al responsable de ventas, con un nivel de significación del 4%.

2.- Para estimar el gasto medio en libros y material escolar por alumno de secundaria en la enseñanza pública se toma una muestra de 121 de estos alumnos, resultando que dicho gasto medio es de 286 euros con una desviación típica de 65 euros. Se pide:

a) Estimar el gasto medio poblacional con una confianza del 95%.
b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra para, con una confianza del 99%, cometer un error menor de 10 euros en dicha estimación.

Solución

a) Intervalo de confianza:

$$\alpha = 0.05;\ \frac{\alpha}{2} = 0.025;\ z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

$$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[286 - 1.96\frac{65}{\sqrt{121}}, 286 + 1.96\frac{65}{\sqrt{121}} \right] = [274.42\ ,\ 297.58]$$

b)

$$\alpha = 0.01;\ \frac{\alpha}{2} = 0.005;\ z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.57$$

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2.575 \times 65}{10} \right)^2 = 280.14 \Rightarrow n \geq 281$$

3.- Se sabe que 8 de cada 10 profesores universitarios tienen ordenador portátil. Si tomamos 300 de estos profesores, calcular la probabilidad de que tengan ordenador portátil:

a) Más de 250.
b) Menos de 230.
c) Más de 220 y menos de 255.

Solución:

X=”nº de profesores con portátil en 300 profesores”; $X \approx Bi\left(300, 0.8\right)$

Como $n > 30$, $np > 5$ y $n\left(1-p\right) > 5$,

$$X \approx Bi\left(300, 0.8\right); \; X' \approx N\left(300\times 0.8, \sqrt{300\times 0.8\times 0.2}\right) = N\left(240,\ 6.928\right)$$

a) $P\left(X > 250\right) \cong P\left(X' > 250\right) = P\left(Z > \dfrac{250-240}{6.928}\right) = P\left(Z > 1.44\right) = 0.0749$

b) $P\left(X < 230\right) \cong P\left(X' < 230\right) = P\left(Z < \dfrac{230-240}{6.928}\right) = P\left(Z < -1.44\right) = 0.0749$

c)

$$P\left(220 < X < 255\right) \cong P\left(220 < X' < 255\right) = P\left(\frac{220-240}{6.928} < Z < \frac{255-240}{6.928}\right) = P\left(-2.88 < Z < 2.16\right) =$$

$$= 0.9846 - 0.002 = 0.9826$$

4.- El número de miles de afiliados a un partido político, *A*(*x*), en función de los años, *x*, transcurridos desde su creación en el año 2000, viene dada por:

$$A(x) = x^3 - 8x^2 + 13x + 294$$

a) ¿Cuántos afiliados había en el año 2000?
b) Calcular los máximos y mínimos de la función.
c) ¿En qué años decrece el número de afiliados?

Solución:

a) $A(0) = 294$

b)

$$A'(x) = 3x^2 - 16x + 13$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

$$A''(x) = 6x - 16$$

$$\begin{cases} A''(1) = -10 \Rightarrow \text{En } x = 1 \text{ hay un máximo} \\ A''\left(\dfrac{13}{3}\right) = 10 \Rightarrow \text{En } x = \dfrac{13}{3} \text{ hay un mínimo} \end{cases}$$

c) El número de afiliados decrece entre el año 2001 y el primer cuatrimestre de 2004.

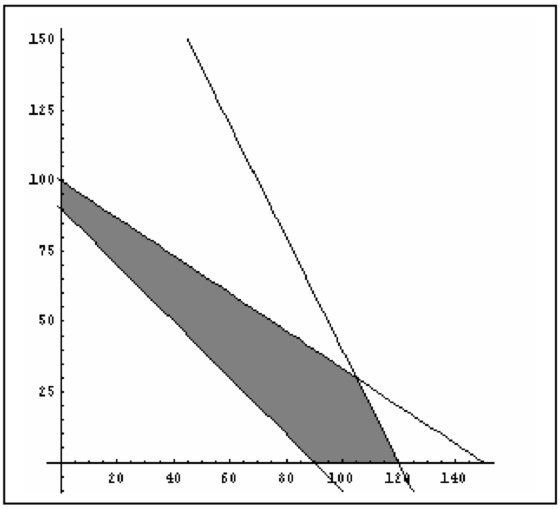
5.- Una fábrica produce dos tipos de televisores: A y B. Para fabricarlos se necesita un tiempo de producción en máquinas y un acabado a mano que realizan los operarios.

La venta del modelo A, que necesita 2 horas en las máquinas y media hora de trabajo a mano, produce un beneficio de 60 euros. La venta del modelo B, que necesita 3 horas en las máquinas y un cuarto de hora de trabajo a mano, origina un beneficio de 55 euros.

Se dispone de un total de 300 horas de trabajo en máquinas y 60 horas de trabajo a mano. Entre los dos tipos de televisores han de fabricarse por lo menos 90. ¿Qué cantidad de televisores de cada tipo ha de producirse para que el beneficio sea máximo?

Solución:

$$\begin{array}{ll} Max & 60x+55y \\ s.a: & 2x+3y \le 300 \\ & 0.5x+0.25y \le 60 \\ & x+y \ge 90 \\ & x,y \ge 0 \end{array}$$



$f(0,90) = 60\times 0 + 55\times 90 = 4950$

$f(0,100) = 60\times 0 + 55\times 100 = 5500$

$f(90,0) = 60\times 90 + 55\times 0 = 5400$

$f(120,0) = 120\times 60 + 55\times 0 = 7200$

$\boxed{f(105,30) = 60\times 105 + 55\times 30 = 7950}$

Para maximizar los beneficios se deben fabricar 30 televisores del tipo A y 105 televisores del tipo B.