PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
L.O.G.S.E.

CURSO 2008 - 2009 CONVOCATORIA:

MATERIA: MATEMATICAS APLICADAS A LAS CC. SS.

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.

- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5 puntos.

PRUEBA A

1.- Hace 4 años el gasto medio en material escolar de un niño de primaria al comienzo del curso era de 210 euros. Este año, para 60 niños, se obtuvo un gasto medio de 225 euros con una desviación típica de 20 euros.

a) Con un nivel de significación del 5%, ¿se acepta que el gasto medio actual sigue siendo de 210 euros?

b) Obtener un intervalo de confianza para el gasto medio con una confianza del 90%.

Solución:

a) Planteamos el contraste:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = 210 \\ H_1 : \mu \neq 210 \end{array}\right\} \quad n = 60 \;\; \bar{X} = 225; \quad \alpha = 0.05; \;\; \frac{\alpha}{2} = 0.025; \;\; z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

Región de aceptación:

$$\left\{\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} \le \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{210 - 1.96\frac{20}{\sqrt{60}} \le \bar{X} \le 210 + 1.96\frac{20}{\sqrt{60}}\right\} = \left\{204.94 \le \bar{X} \le 215.06\right\}.$$

Como $\bar{X} = 225 \notin [204.94 \;,\; 215.06]$ se rechaza H_0.

b) Intervalo de confianza:

$$\alpha = 0.1; \;\; \frac{\alpha}{2} = 0,05; \;\; z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1.64$$

$$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[225 - 1.64\frac{20}{\sqrt{60}}, 225 + 1.64\frac{20}{\sqrt{60}}\right] = [220.76 \;,\; 229.23]$$

2.- Se cree que, como mínimo, el 45% de los conductores suspendería un examen teórico. Se les hizo un examen teórico a 200 conductores de los cuales 70 suspendieron.

a) Con un nivel de significación del 2%, ¿se acepta que, como mínimo, el 45% de los conductores suspendería un examen teórico?

b) Usando la información del estudio muestral anterior, ¿qué número de conductores sería necesario examinar para, con una confianza del 90%, obtener un intervalo de confianza de amplitud 0.04?

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \ge 0.45 \\ H_1 : p < 0.45 \end{array}\right\} \quad n = 200; \;\; \hat{p} = \frac{70}{200} = 0.35; \quad \alpha = 0.02; \;\; z_{\alpha} = z_{0.02} = 2.05$$

Región de rechazo: $\left\{ \hat{p} < p_0 - z_\alpha \sqrt{\dfrac{p_0\left(1-p_0\right)}{n}} \right\} = \left\{ \hat{p} < 0.45 - 2.05\sqrt{\dfrac{0.45 \times 0.55}{200}} \right\} = \left\{ \hat{p} < 0.377 \right\}$

Como $\hat{p} = 0.35$ se rechaza H_0, con un nivel de significación del 2%.

b)

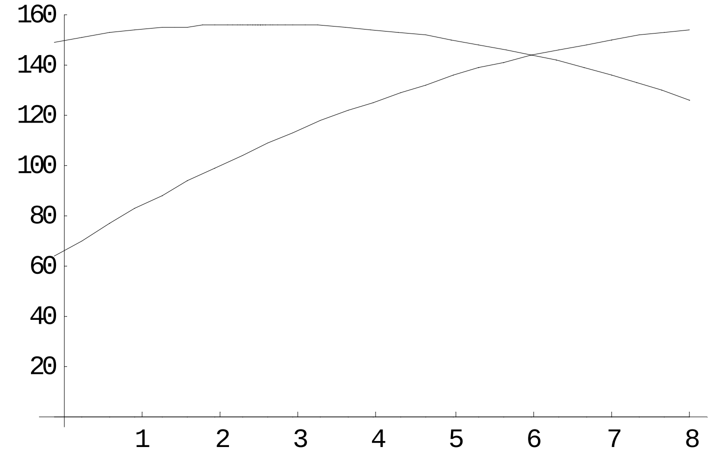
$\alpha = 0,1 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1.64$

$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} < E \;\Rightarrow\; n > \left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \hat{p}\cdot(1-\hat{p}) \;\Rightarrow\; n > \left(\dfrac{1.64}{0.02}\right)^2 0.35 \times 0.65 = 1529.71 \Rightarrow n \geq 1530$

3.- El rendimiento de dos trabajadores, en metros por hora, marcando una zanja, viene dado por las funciones $f(x) = -x^2 + 19x + 66$ y $g(x) = -x^2 + 5x + 150$, respectivamente, para $0 \leq x \leq 8$, siendo x el tiempo transcurrido desde el comienzo de la jornada..

a) ¿Qué trabajador comienza el día con mayor rendimiento?
b) ¿Cuándo es máximo el rendimiento del primer trabajador?
c) ¿Cuándo están rindiendo igual los dos trabajadores?
d) ¿Cuántos metros marca, en su jornada de 8 horas, el segundo trabajador?

Solución:



a) $f(0) = 66$ es el rendimiento del primer trabajador al comienzo del día

$g(0) = 150$ es el rendimiento del segundo trabajador al comienzo del día, que es mayor que el primero.

b)

$f'(x) = -2x + 19;$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x + 19 = 0 \;\Rightarrow\; x = 9.5 \notin [0,8]$

Como la función es creciente en $(-\infty, 8]$, el máximo lo alcanza al final de jornada, es decir en $x = 8$

c) $f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; -x^2 + 19x + 66 = -x^2 + 5x + 150 \Rightarrow x = 6$

es decir, a la sexta hora están rindiendo igual los dos trabajadores.

d)

$$\int_0^8 g(x)dx = \int_0^8 -x^2 + 5x + 150 \; dx = -\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 150x \Big|_0^8 =$$

$$= -\frac{8^3}{3} + 5\frac{8^2}{2} + 150\cdot 8 - [\,0\,] = 1189.33m$$

4.- La tasa de producción anual, en miles de toneladas, de una cantera de piedra, sigue la función

$$f(x)=\begin{cases}50+3x & si\ \ 0\le x\le 10\\ -2x+100 & si\ \ x>10\end{cases}$$

siendo *x* el número de años desde su apertura.

a) Representar la función.

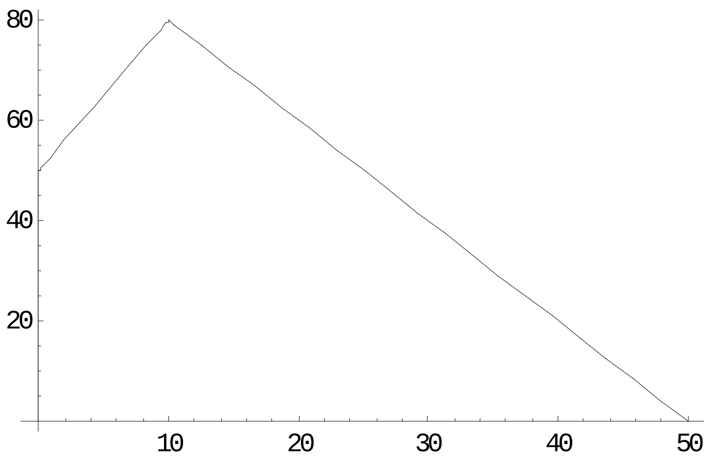
b)¿En qué momento es máxima la tasa de producción?

c) ¿Cuándo es la tasa de producción igual a sesenta y dos mil toneladas?

d) ¿Al cabo de cuántos años se extingue la cantera?

Solución:

a)



b) $x = 10$ años

c) $\begin{cases}50+3x=62\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4\ \textit{años}\\ -2x+100=62\Rightarrow -2x=-38\Rightarrow x=19\ \textit{años}\end{cases}$

d) $x = 50$

5.- Una empresa ha gastado 6560€ en comprar 90 cestas de navidad de tres tipos, que cuestan a 60, 80 y 120€, respectivamente. Las cestas más caras son un 10% de las cestas compradas.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántas cestas de cada tipo compró la empresa?

Solución:

El sistema es:

$$\left.\begin{array}{l}A+B+C=90\\ 60A+80B+120C=6560\\ C=\dfrac{10}{100}\cdot 90\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A+B+C=90\\ 60A+80B+120C=6560\\ C=9\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A+B+9=90\\ 60A+80B+120\cdot 9=6560\\ C=9\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A=50\\ B=31\\ C=9\end{array}\right\}$$

PRUEBA B

1.- El 62% de los estudiantes universitarios son mujeres. Si se toma una muestra aleatoria de 150 estudiantes.

a) ¿Cuál es el número esperado de mujeres?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, como mínimo, 100 sean mujeres?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 85 y menos de 95 mujeres?

Solución:

X=”nº de mujeres en 160 estudiantes universitarios”; $X \approx Bi(150, 0.62)$

a) Número esperado $n \cdot p = 150 \cdot 0.62 = 93$

b) Como $n > 30$, $np > 5$ y $n(1-p) > 5$, $X \approx Bi(150, 0.62)$; $X' \approx N\left(93, \sqrt{150 \times 0.62 \times 0.38}\right) = N(93, 5.94)$

$$P(X > 100) \cong P(X' > 100) = P\left(Z > \frac{100-93}{5.94}\right) = P(Z > 1.18) = 0.1190$$

c) Como $n > 30$, $np > 5$ y $n(1-p) > 5$, $X \approx Bi(150, 0.62)$; $X' \approx N\left(93, \sqrt{150 \times 0.62 \times 0.38}\right) = N(93, 5.94)$

$$P(85 < X < 95) \cong P(85 < X' < 95) = P\left(\frac{85-93}{5.94} < Z < \frac{95-93}{5.94}\right) = P(-1.35 < Z < 0.34) =$$
$$= 1 - 0.3669 - 0.0885 = 0.5446$$

2.- En una muestra aleatoria de 80 vehículos, 56 son de gasolina.

a) Calcular un intervalo de confianza para la proporción de vehículos de gasolina, con un nivel de confianza del 98%.
b) Usando la información inicial, ¿cuál sería el tamaño muestral para estimar la proporción de vehículos de gasolina, con un error menor del 4% y con una confianza del 94%?

Solución:

a) El intervalo de confianza es:

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Como $\hat{p} = \frac{56}{80} = 0.7$, $\alpha = 0.02$; $\frac{\alpha}{2} = 0.01$; $z_{\alpha/2} = z_{0.01} = 2.33$, el intervalo es igual a:

$$\left[0.7 - 2.33\sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{80}}, 0.7 + 2.33\sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{80}}\right] = [0.5806,\ 0.8193]$$

b)

$$\alpha = 0,06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,03} = 1.88$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} < E \;\Rightarrow\; n > \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \hat{p}\cdot(1-\hat{p}) \;\Rightarrow\; n > \left(\frac{1.88}{0.04}\right)^2 0.7 \times 0.3 = 463.89 \Rightarrow n \geq 464$$

3.- La **pulgada** es una unidad de longitud antropométrica que equivale a la longitud media de la primera falange del pulgar. Hace 150 años se estableció que esta medida era de 2,54 cm, y que la desviación típica de la longitud de la primera falange era de 0.2cm. Sin embargo, en 2008, para una muestra de 36 personas, se obtuvo una media de la longitud de la primera falange del pulgar de 2,63cm.

a) A partir de la información muestral y con una significación del 4%, ¿se sigue aceptando que la longitud media de la primera falange del pulgar es 2.54 cm. frente a que ha aumentado?

b) Obtener un intervalo de confianza al 98% para la longitud media de la primera falange del pulgar.

Solución:

a) X="Longitud de la primera falange", $X \approx N(\mu, 0.2)$

El contraste que hay que plantear es:

a)

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = 2.54 = \mu_0 \\ H_1 : \mu > 2.54 \end{array}\right\} \qquad \overline{X} = 2.61; \quad \alpha = 0,04; \quad ; \quad z_{0,04} = 1.75$$

Región de Rechazo: $\left\{ \overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \overline{x} > 2.54 + 1.75 \dfrac{0.2}{\sqrt{36}} \right\} = \left\{ \overline{x} > 2.59 \right\}$

Como $\overline{X} = 2.63$, se rechaza H_0.

b) $\alpha = 0,02$; $\dfrac{\alpha}{2} = 0.01$; $z_{0,01} = 2.33$

$$\left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[2.63 - 2.33 \frac{0.2}{\sqrt{36}},\ 2.63 + 2.33 \frac{0.2}{\sqrt{36}} \right] = [2.63 \pm 0.077] = [2.552, 2.707]$$

4.- Debido a un chaparrón, el caudal de agua que entra a un depósito de recogida de agua sigue la función $f(t) = -t^2 + 20t$ (t expresado en minutos y $f(t)$ en litros por minuto)

a) ¿Cuánto tiempo está entrando agua al depósito?

b) ¿Cuándo es máximo el caudal que entra? ¿Cuánto es ese caudal máximo?

c) ¿Cuántos litros se han recogido tras el chaparrón?

Solución:

a) Dejará de entrar agua cuando $f(t) = 0$; $-t^2 + 20t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 20 \end{cases}$

Durante 20 minutos estuvo entrando agua al depósito.

b) $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 10$, $f''(t) = -2 < 0$, luego a los 10 minutos es cuando más agua está entrando. $f(10) = -10^2 + 2010 = 100$ litros por minuto

c)

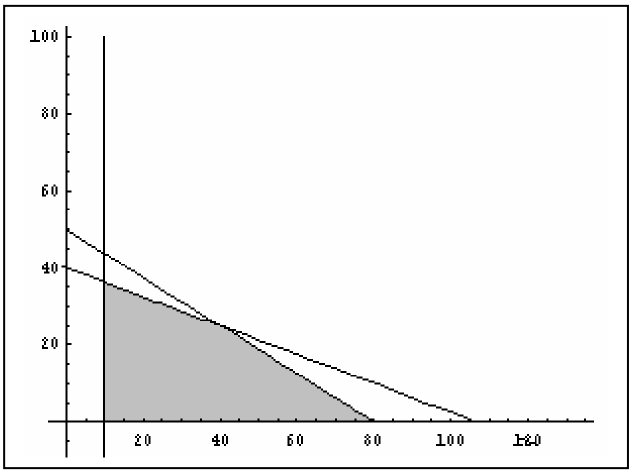
$$\int_0^{20} \left(-t^2 + 20t\right) dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 20\frac{t^2}{2} \right]_0^{20} = -\frac{20^3}{3} + 20\frac{20^2}{2} = 1333.33 \ litros$$

5.- En una pastelería se preparan dos tipos de roscones. Para cada unidad del primero se necesitan 5 huevos y 1.5 kilos de harina y para cada unidad del segundo son necesarios 8 huevos y 4 kilos de harina. Hay que fabricar al menos 16 unidades del tipo A. Los del tipo A se venden a 10€ y los del tipo B a 14€. Se disponen de 400 huevos y 160 kilos de harina y se quiere determinar el número de roscones de cada tipo que se han de producir para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.
b) ¿Cuál es la producción que maximiza los ingresos?
c) Con la producción que maximiza los ingresos, ¿se gasta toda la harina?

a)

$$\begin{array}{ll} Max & 10x+14y \\ s.a: & 5x+8y \le 400 \\ & 1.5x+4y \le 160 \\ & x \ge 16 \\ & x, y \ge 0 \end{array}$$



b)

$f(40,25) = 10 \times 40 + 14 \times 25 = 750$

$f(16,34) = 160 + 14 \times 34 = 636$

$\boxed{f(80,0) = 10 \times 80 + 14 \times 0 = 800}$

c) Se gastaron $80 \times 1.5 = 120$ kilos de harina; es decir, sobraron 40 kilos.